Lösungsvorschlag zum Hausaufgabenblatt 9

G. Svindland

Aufgabe 1: Sei $(x_0, y_0) \in M \times N$. Dann gibt es zu $x_0 \in M$ und $y_0 \in N$ offene Umgebungen $V_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ und $V_{y_0} \subset \mathbb{R}^m$ und Funktionen $h^{x_0} \in \mathcal{C}^1(V_{x_0}, \mathbb{R}^{n-k})$, $h^{y_0} \in \mathcal{C}^1(V_{y_0}, \mathbb{R}^{m-l})$ mit

$$V_{x_0} \cap M = \{x \in V_{x_0} \,|\, h^{x_0}(x) = c_{x_0}\}$$

und

$$V_{y_0} \cap N = \{y \in V_{y_0} \,|\, h^{y_0}(y) = c_{y_0}\},$$

wobei $c_{x_0} := h^{x_0}(x_0)$ und $c_{y_0} := h^{y_0}(y_0)$. Dann ist $V := V_{x_0} \times V_{y_0} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen und

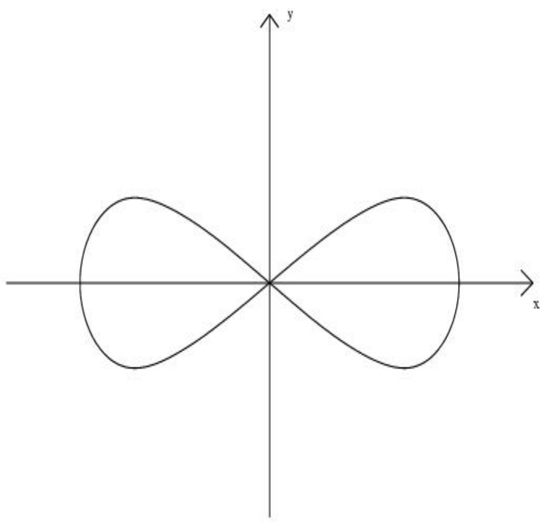
$$V \cap (M \times N) = \{(x, y) \in V \,|\, h(x, y) = c\}$$

für $h(x, y) := (h^{x_0}(x), h^{y_0}(y))$ und $c := h(x_0, y_0)$. h ist differenzierbar mit

$$Dh(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} Dh^{x_0}(x_0) & 0 \\ 0 & Dh^{y_0}(y_0) \end{pmatrix},$$

also $rgDh(x_0, y_0) = n+m-(k+l)$. Folglich ist $M \times N$ eine $(k+l)$-dimensionale Submannigfaltigkeit. (Darstellung als Niveaugebilde).

Aufgabe 2: Bei $(0, 0)$ gibt es eine Selbstüberschneidung von M (siehe Skizze).



Daher gibt für *keine* offene Umgebung V um $(0, 0)$ eine stetig umkehrbare, differenzierbare Bijektion $g : U \to V \cap M$ mit $U \subset \mathbb{R}$ offen. Es scheitert schon an der geforderten Injektivität und Stetigkeit von g!

$M\backslash\{(0,0)\}$ ist jedoch eine Submannigfaltigkeit:
Für $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ seien

$$g_1(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

und

$$g_2(x) = -x\sqrt{1-x^2}\,,$$

und für $y \in]-1/16, 1/16[$ seien

$$g_3 = \sqrt{1/2 + \sqrt{1/4 - y^4}}\,,$$

$$g_4 = -\sqrt{1/2 + \sqrt{1/4 - y^4}}\,.$$

(Darstellung als Graph).

Aufgabe 3: Sei $h := \mathbb{R}^{n\times n} \to S(n,\mathbb{R})$, $h(A) = A^t A$. Dabei bezeichnet $S(n,\mathbb{R}) \backsimeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ den Raum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Es ist $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, h(A) = E\}$. h ist differenzierbar, weil die Einträge Polynome sind bzw. es gilt:

$$(A+H)^t(A+H) = A^tA + A^tH + H^tA + H^tH = h(A) + A^tH + H^tA + o(H)\,.$$

Folglich ist für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $Dh(A)B = A^tB + B^tA$.
$Dh(A)$ ist surjetiv auf $S(n,\mathbb{R})$ für alle $A \in O(n)$: Denn für alle $C \in S(n,\mathbb{R})$ gilt:

$$C = \frac{1}{2}A^tAC + \frac{1}{2}C^tA^tA = Dh(A)\frac{1}{2}AC\,.$$

Also folgt

$$rg(Dh(A)) = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Daher ist $O(n)$ eine $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Submannigfaltigkeit. (Darstellung als Niveaugebilde) Weiter folgt aus der Darstellung von $Dh(A)$, daß $T_E(O(n)) = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, -B = B^t\}$.

Aufgabe 4:

a) Es ist $(A_0, B_0) = \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\right)$. In einer offenen Umgebung U von (A_0, B_0) läßt sich M beschreiben als

$$M \cap U = \{x \in U \,|\, h(x) = (1,1,1)^t\}$$

mit $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|(x_1,x_2)\|_2^2 \\ \|(x_1-x_3, x_2-x_4)\|_2^2 \\ \|(x_3-2, x_4)\|_2^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$Dh(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 2(x_1-x_3) & 2(x_2-x_4) & 2(x_3-x_1) & 2(x_4-x_2) \\ 0 & 0 & 2(x_3-2) & 2x_4 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$Dh(A_0, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man $T_{(A_0,B_0)}M = k \cdot (3, \sqrt{3}, 3, -\sqrt{3})^t$, $k \in \mathbb{R}$.

b) Sei $\gamma(t)$ eine Kurve durch die Ruhelage entlang einer beliebigen Auslenkung der Figur. Dann ist $\gamma'(t) = k \cdot (3, \sqrt{3}, 3, -\sqrt{3})^t$ für irgendein $k \in \mathbb{R}$. Also ist die Auslenkung in Richtung der y-Koordinate von B in linearisierter Approximation proportional abhängig von der Auslenkung in Richtung der x-Koordinate von A und zwar mit Proportionalitätskonstanten $\frac{-k\sqrt{3}}{3k} = -1/\sqrt{3}$. D.h., daß die Ableitung der y-Koordinate von B betrachtet als Funktion der x-Koordinate von A im Punkt (A_0, B_0) genau $-1/\sqrt{3}$ ist.
Man kann das auch folgendermaßen erkennen: In einer Umgebung U der Ruhelage (A_0, B_0) wird M beschrieben durch

$$h((x_1, x_2, x_3, x_4)^t) = (1, 1, 1)^t$$

(siehe a)). Nach dem implizite-Funktionen-Satz läßt sich $M \cap U$ durch differenzierbare Funktionen g_2, g_3, g_4 beschreiben:

$$h\left((x_1, g_2(x_1), g_3(x_1), g_4(x_1))^t\right) = (1, 1, 1)^t.$$

Also ist

$$Dh\left((x_1, g_2(x_1), g_3(x_1), g_4(x_1))^t\right)(1, g_2'(x_1), g_3'(x_1), g_4'(x_1))^t = 0$$

D.h.

$$(1, g_2'(x_1), g_3'(x_1), g_4'(x_1))^t \in T_{(A_0,B_0)}M,$$

wenn x_1 die x-Koordinate von A_0 ist. Folglich ist:

$$(1, g_2'(x_1), g_3'(x_1), g_4'(x_1))^t = k \cdot (3, \sqrt{3}, 3, -\sqrt{3})^t$$

für ein $k \in \mathbb{R}$ (siehe a)). Also folgt: $g_4'(x_1) = -1/\sqrt{3}$.