Lösungsvorschlag zum Hausaufgabenblatt 5

G. Svindland

Aufgabe 1: Sei $f(x,y) := y\exp(xy)$. Dann ist:

$$\nabla f = \exp(xy)\begin{pmatrix} y^2 \\ (1+xy) \end{pmatrix} \qquad f_{xy} = f_{yx} = (2y + xy^2)\exp(xy)\,.$$

Aufgabe 2: Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^4 + y^6 \\ xy + yz + xz \end{pmatrix}.$$

g ist stetig. Daher ist $M = g^{-1}\binom{1}{0}$ abgeschlossen. Außerdem ist M beschränkt. Denn es ist $M \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|x\|_\infty \leq 1\}$, da für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\|_\infty > 1$ folgt: ${x^2}_1 + x_2^4 + x_3^6 > 1$. Also ist M kompakt. Daher nimmt die stetige Funktion f dort ein Maximum und ein Minimum an.

Aufgabe 3: Ausrechnen!

Aufgabe 4: f ist stetig. Also ist $f(M)$ kompakt. Da f außerdem eine Bijektion ist, folgt $N = f(M)$. Also ist N kompakt. Sei nun $A \subseteq M$ eine beliebige abgeschlossene Menge. Dann ist A kompakt und daher auch $f(A)$ kompakt, d.h. insbesondere abgeschlossen (N ist Hausdorffraum). Nun gilt offensichtlich $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$. Folglich sind Urbilder bezüglich f^{-1} von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen. D.h f^{-1} ist stetig.

Aufgabe 5: Sei

$$\bigcup_{i\in I} U_i \supseteq A \times B$$

eine offene Überdeckung von $A \times B$. Fixiere ein beliebiges $a \in A$. Dann gibt es zu jedem $b \in B$ eine Menge $U_{a,b} \in \{U_i \,|\, i \in I\}$ mit $(a,b) \in U_{a,b}$. Da $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$, haben die $U_{a,b}$ folgende Form:

$$U_{a,b} = \bigcup_{(C,D)\in\mathcal{P}_b} C \times D, \quad \text{mit} \quad \mathcal{P}_b \subseteq \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B\,.$$

Also gibt es zu jedem $b \in B$ ein Paar $(C_b, D_b) \in \mathcal{P}_b$ mit $(a,b) \in C_b \times D_b$. Die Menge $\{D_b \,|\, b \in B\}$ bildet eine offene Überdeckung von B. Da B kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{D_{b_1}, \ldots, D_{b_{n(a)}}\}$. Seien

$$C_a := \bigcap_{i=1}^{n(a)} C_{b_i}\,, \quad D_a := \bigcup_{i=1}^{n(a)} D_{b_i}\,.$$

Dann gilt:

$$(\{a\} \times B) \subseteq C_a \times D_a = \bigcup_{i=1}^{n(a)} C_a \times D_{b_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(a)} C_{b_i} \times D_{b_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(a)} U_{a,b_i} \, .$$

Für jedes $a \in A$ können wir solche Mengen C_a und D_a konstruieren. Die Mengen C_a bilden dann eine offene Überdeckung $\{C_a \,|\, a \in A\}$ von A. Aus der Kompaktheit von A folgt wiederum die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung $\{C_{a_1}, \ldots, C_{a_m}\}$. Dann gilt:

$$A \times B \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_a \right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{m} D_a \right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} C_a \times D_a \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n(a)} U_{a,b_i} \, .$$