Lösungsvorschlag zum Hausaufgabenblatt 4. (Gregor Friedland)

(1.) i) Sei $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $V\times V$ mit

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} (x,y) \in V\times V.$$

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen in V mit $x_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} x$ und $y_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} y$

(siehe Definition der Produktmetrik)

$$\Rightarrow \|x_n + y_n - x - y\| \le \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0} + \underbrace{\|y_n - y\|}_{\xrightarrow[n\uparrow\infty]{}} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$$

Also $(x_n + y_n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} (x+y)$.

Damit folgt die Stetigkeit von $+$.

ii) Sei $(\alpha_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}\times V$ mit

$$(\alpha_n, x_n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} (\alpha, x) \in \mathbb{R}\times V$$

Wieder folgt, daß dann $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V ist mit

$$x_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} x \quad \text{und} \quad \alpha_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \alpha.$$

$$\Rightarrow \|\alpha_n x_n - \alpha x\| \le \underbrace{|\alpha_n|}_{\xrightarrow[n\uparrow\infty]{} |\alpha|} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0} + \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0}\|x\| \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$$

Somit ist auch $\cdot$ stetig.

(2.) Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $u := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wir bestimmen die Eigenwerte $-1, 1, 2$ von A und eine Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ aus Eigenvektoren.

Die lineare Algebra liefert:

$$A = B \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt für die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems: $x' = Ax$, $x(0) = u$:

$$x(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Vorlesung}}}{=} \exp(tA)u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Übungen und Bemerkung aus den Vorlesung zur Berechnung von } \exp(A).}}{=} \begin{pmatrix} -(e^{-t} + e^{t}) \\ 2e^{-t} + e^{t} \\ e^{t} + e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

③ a) $\exp(A+B) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(A+B)^k$

da $AB = BA$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A^j \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j}$$

Man bemerke, daß diese Umordnung erlaubt ist, da die Reihe absolut konvergiert (Satz 3.24, Analysis I)

$$= \left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} A^j\right)\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} B^k\right)$$

$$= \exp(A)\exp(B)$$

b) Seien z.B. $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dann ist $AB \neq BA$.

Außerdem ist $A^2 = 0$ und daher $\exp(A) = I_2 + A$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$B^k = B$ für alle $k \geq 1$, also $\exp(B) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Desweiteren ist $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $(A+B)^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall k \geq 1$.

Also $\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Demzufolge ist:

$$\exp(A+B) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(A)\exp(B).$$

4.

Sei

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & 0 & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $A = \lambda I_n + B$.

Außerdem gilt: $I_n B = B I_n$.

Mit 3a) folgt nun, daß

$$\exp(A) = \exp(\lambda I_n + B) = \exp(\lambda I_n)\exp(B).$$

Es ist $\exp(\lambda I_n) = e^{\lambda} I_n$. Weiterhin erkennt man leicht, daß

$$B^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ & & 0 & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

k-te obere Nebendiagonale

für $1 \le k < n$

und $B^k = 0$ für $k \ge n$.

Also:

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & 0 & & & & 1 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\exp(A) = e^{\lambda} \exp(B)$

(5) a) Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}' = kA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}' = kA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(0) = u$

gegeben durch $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \exp(tkA)u$.

Die Eigenwerte von A sind $-3, -1$ und 0 mit Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet man:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \exp(tkA)u = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-3kt} + \frac{1}{2}e^{-kt} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}e^{-3kt} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}e^{-3kt} - \frac{1}{2}e^{-kt} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c) Man sieht sofort, daß

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow[t \uparrow \infty]{} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$