Lösungsvorschlag zum Hausaufgabenblatt 3
(Gregor Swindland)

(1.) Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Funktion.
Sei $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$,
d.h.
$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ter Eintrag}.$$

Außerdem sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Cauchy-Folge mit $x_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} x \in \mathbb{R}^n$. Dann können wir für alle $n \in \mathbb{N}$ x_n schreiben als
$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i^n e_i \quad \text{mit } a_i^n \in \mathbb{R} \text{ und}$$
$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad , \; a_i \in \mathbb{R} \quad , \; i = 1, \dots, n.$$
Wir wissen, daß $a_i^n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} a_i$, $i = 1, \dots, n$, in $\mathbb{R}$.

Es ist für $1 \leq p \leq \infty$:
$$\| L(x_n) - L(x) \|_p = \Big\| \sum_{i=1}^n a_i^n L(e_i) - \sum_{i=1}^n a_i L(e_i) \Big\|_p$$
$$\leq \sum_{i=1}^n \underbrace{| a_i^n - a_i |}_{\xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0} \underbrace{\| L(e_i) \|_p}_{= \text{konst.}}$$
$$\xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0.$$
Also ist L stetig.

③ i) Wir zeigen zunächst $\tau_p \subseteq \tau_q$:

Sei $f \in C[0,1]$ und $\tilde{f} := \frac{f}{\|f\|_q}$.

Dann ist

$$\|\tilde{f}\|_p = \left(\int_0^1 |\tilde{f}(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(1 + \int_0^1 |\tilde{f}(x)|^q \, dx \right)^{1/p}$$

$$= \left(1 + \underbrace{\|\tilde{f}\|_q^q}_{=1} \right)^{1/p}$$

$$= \sqrt[p]{2}.$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_p \leq \sqrt[p]{2} \, \|f\|_q.$$

$$\xRightarrow[\text{der Vorlesung}]{\text{Lemma aus}} \quad \tau_p \subseteq \tau_q.$$

ii) Wir zeigen nun, daß $\tau_p \subsetneq \tau_q$:

Wäre $\tau_p = \tau_q$, dann müßte es laut Aufgabe 4 des 2ten Übungsblattes eine Konstante $C > 0$ geben, so daß für alle $f \in C[0,1]$:

$$\|f\|_q \leq C \cdot \|f\|_p \quad . \quad (*)$$

Angenommen es gibt so ein C. Dann gilt $(*)$ insbesondere für Funktionen des Typs $x^b \in C[0,1]$ mit $b > 0$.

Es ist $\|x^b\|_q = \frac{1}{(bq+1)^{1/q}}$, $\|x^b\|_p = \frac{1}{(bp+1)^{1/p}}$.

Mit (*) folgt: $\frac{(bp+1)^{1/p}}{(bq+1)^{1/q}} \leq C$

Setze $b = \frac{a-1}{q}$ für ein $a > 1$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\left((a-1)\frac{p}{q}+1\right)^{1/p}}{a^{1/q}} \leq C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(a\frac{p}{q}\right)^q}{a^p} \leq C^{pq} \quad \left(\text{, da } (a-1)\frac{p}{q}+1 \geq a\frac{p}{q}, \text{ denn } p<q\right)$$

$$\Rightarrow \quad a^{q-p}\left(\frac{p}{q}\right)^q \leq C^{pq} \quad (**)$$

(**) müßte also für alle $a > 1$ gelten. Das ist aber nicht erfüllt, da $q-p > 0$ und x^{q-p} auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend ist. Wähle z.B. $a > C^{\frac{pq}{q-p}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q}{q-p}}$.

Also gibt es Funktionen (z.B. des Typs x^b, $b>0$) für die (*) nicht erfüllt ist. Dann kann aber <u>nicht</u> $\mathcal{T}_q \subseteq \mathcal{T}_p$ sein. Also folgt $\mathcal{T}_p \subsetneqq \mathcal{T}_q$.

④ a) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (n)^{1/p} \|x\|_\infty .$$

Da $n^{1/p} \longrightarrow 1$ für $p \to \infty$, folgt

$$\|x\|_p \longrightarrow \|x\|_\infty \quad \text{für } p \longrightarrow \infty .$$

b) Sei $f \in C[a,b]$. Dann gilt:

$$\|f\|_\infty (b-a)^{1/p} \geq \|f\|_p \quad \forall p \geq 1 . \quad (*)$$

Da $[a,b]$ kompakt ist und $|f| \in C[a,b]$ wissen wir, daß $|f|$ auf $[a,b]$ sein Maximum annimmt.
Es existiert also ein $x^* \in [a,b]$ mit $\|f\|_\infty = |f(x^*)|$.
Außerdem folgt aus der Stetigkeit von $|f|$ ~~dass~~ $\forall \varepsilon > 0$ die Existenz ~~eines~~ von $\delta > 0$ derart, daß

$$|f(x)| \geq |f(x^*)| - \varepsilon \quad \text{für } x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$$

Nun ist:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \left(\int_{-\frac{\delta}{2}+x^*}^{x^*+\delta/2} \big| |f(x^*)| - \varepsilon \big|^p dx \right)^{1/p}$$

$$= \big| |f(x^*)| - \varepsilon \big| \, \delta^{1/p} = \big| \|f\|_\infty - \varepsilon \big| \, \delta^{1/p} \quad (**)$$

Für $p \to \infty$ gilt: $(b-a)^{1/p} \to 1$ in $(*)$

und $\delta^{1/p} \to 1$ in $(**)$

$\varepsilon > 0$ war beliebig. Also folgt:

$$\|f\|_p \xrightarrow[p \uparrow \infty]{} \|f\|_\infty .$$

(5.) Definiere $Q : (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \setminus \{(0,0), (\infty,\infty)\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

durch
$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & \text{falls } (x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{falls } (x,y) \in \mathbb{C} \times \{\infty\} \\ \infty, & \text{falls } (x,y) \in \{\infty\} \times \mathbb{C} \\ \infty, & \text{falls } (x,y) \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \times \{0\} \end{cases}$$

(i) Wir wissen, daß $Q|_{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\}} = q$ stetig ist und daß $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\}$ offen in $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2$ ist.

$\Rightarrow$ Q ist stetig in allen Punkten aus $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) Sei U eine offene ~~Abbildung~~ ~~um~~ Umgebung von $Q(0,\infty) = 0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^{|\cdot|}(0) \subset U$. Sei $V := \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid |z| < \varepsilon\} \times \{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid |z| > 1\}$.

$\Rightarrow$ V ist offen, $(0,\infty) \in V$ und $\forall (x,y) \in V$ gilt:

$$\left|\frac{x}{y}\right| < \varepsilon \quad , \text{also } Q(V) \subseteq U.$$

(iii) Sei U eine offene Umgebung von $Q(\infty,0) = \infty$. Dann existiert ein $N > 0$ ~~mit~~ derart, daß für alle $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $|z| > N$ folgt $z \in U$.

Sei $V := \{z \mid |z| > N\} \times \{z \mid |z| < 1\}$

$\Rightarrow$ V ist offen, $(\infty, 0) \in V$, $\forall (x,y) \in V$:

$$\left|\frac{x}{y}\right| > N \quad , \text{also } Q(V) \subseteq U.$$

(iv) Sei $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung um $Q(x,\infty)=0$ für ein $x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Dann $\exists\ \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_{\varepsilon}^{|\cdot|}(0) \subseteq \mathcal{U}$.

Sei $V := \mathcal{U}_{|x|}^{|\cdot|}(x) \times \{ z \mid |z| > \frac{2|x|}{\varepsilon} \}$

$\Rightarrow$ V ist offen, $(x,\infty) \in V$ und $\forall (v,w) \in V$:

$$\left|\frac{v}{w}\right| \le \frac{|v-x|+|x|}{|w|} < \frac{2|x|}{|w|} < \frac{2|x|}{2|x|} \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

also $Q(V) \subseteq \mathcal{U}$.

(v) Sei $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung um $Q(\infty,x) = \infty$, $x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Dann $\exists\ N > 0$ derart, daß $\forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $|z| > N$ folgt $z \in \mathcal{U}$. Sei $V := \{ z \mid |z| > 2|x|N \} \times \{ z \mid |x-z| < |x| \}$

V ist offen, $(\infty,x) \in V$ und $\forall (v,w) \in V$:

$$\left|\frac{v}{w}\right| > \frac{2|x|N}{|x-w|+|x|} > N, \text{ also } Q(V) \subseteq \mathcal{U}.$$

(vi) Sei $\mathcal{U}$ eine offene Umgebung um $Q(x,0) = \infty$, $x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Dann $\exists\ N > 0$, so daß $\forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $|z| > N$ folgt $z \in \mathcal{U}$. Sei $V := \{ z \mid |z-x| < \frac{|x|}{2} \} \times \{ z \mid |z| < \frac{|x|}{2N} \}$

Dann ist V offen, $(x,0) \in V$ und für alle $(v,w) \in V$ gilt: $|x-v| < \frac{|x|}{2} \Rightarrow |v| > \frac{|x|}{2}$ und somit

$$\left|\frac{v}{w}\right| > \frac{|x|}{2} \cdot \frac{2N}{|x|} = N, \text{ also } Q(V) \subseteq \mathcal{U}.$$

(vii) Aus (i), ..., (vi) folgt, daß Q stetig ist.

(viii) Es gibt keine stetige Fortsetzung von Q in die Punkte $(0,0)$ und (∞,∞). Denn:

a) Betrachte die Folgen $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Dann konvergieren beide Folgen gegen $(0,0)$, aber

$$Q\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \infty$$

und $$Q\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$$

Daher ist Q (und somit auch q) nicht in $(0,0)$ stetig fortsetzbar.

b) Analog zeigt man, daß es keine stetige Fortsetzung von Q in (∞,∞) gibt: Betrachte die Folgen $(n, n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(n^2, n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Es gilt:

$$Q(n, n^2) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0$$

und $$Q(n^2, n) = n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \infty.$$