Lösungsvorschläge zum Hausaufgabenblatt 2

Aufgabe 1: Man überlege sich, daß wenn die Orte an derselben Strecke liegen, wir die Metrikeigenschaften wie in $(\mathbb{R}, |.|)$ haben.

Liegen die Orte A, B auf unterschiedlichen Strecken, so ist insb. $A \neq B$, und die erforderlichen Metrikeigenschaften ($d(A,B) > 0$, $d(A,B) = d(B,A)$, Dreiecksungleichung) folgen leicht, da man immer im Punkt P umsteigen muß.

Aufgabe 2: Wir schauen in den Beweis der Hölderungleichung aus der Vorlesung, und zwar in die letzte Abschätzung (d.h. ab $\frac{|\sigma(x,y)|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \ldots$)

Die in der Aufgabe gefundene Gleichheit gilt genau dann, wenn die beiden in der Abschätzung auftretenden Ungleichungen Gleichungen sind.

D.h.: 1. Es muß $|\sigma(\tilde{x},\tilde{y})| = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i||\tilde{y}_i|$ sein.

Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\tilde{x}_i \tilde{y}_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$ gilt.

Dies ist aber äquivalent zu $x_i y_i \geq 0 \;\forall\, i = 1, \ldots, n$.

[Der Fall, daß $x = 0$ und/oder $y = 0$, ist trivial. Wir gehen hier, wie im Beweis, davon aus, daß $x, y \neq 0$.]

2. Es muß $\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i||\tilde{y}_i| = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p}|\tilde{x}_i|^p + \frac{1}{q}|\tilde{y}_i|^q\right)$ sein. $(*)$.

Wir erinnern uns, daß die zweite Ungleichung der Abschätzung auf der Tatsache beruht, daß für $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad (**) \text{ gilt.}$$

Die Frage ist also, wann in $(**)$ Gleichheit gilt.

Dies ist aber genau dann der Fall, falls

$$\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \begin{cases} \log a^p \\ (\text{oder}) \\ \log b^q \end{cases}.$$

$$\Longleftrightarrow \quad ab = a^p \text{ oder } ab = b^q.$$

$$\Longleftrightarrow \quad b = a^{p-1} \text{ oder } a = b^{q-1}.$$

D.h. $(*)$ gilt genau dann, wenn

$$|\tilde{x}_i| = |\tilde{y}_i|^{q-1} \text{ oder } |\tilde{y}_i| = |\tilde{x}_i|^{p-1} \; \forall i=1,\dots,n.$$

$$\Longleftrightarrow |\tilde{x}_i|^p = |\tilde{y}_i|^{p(q-1)} \text{ oder } |\tilde{y}_i|^q = |\tilde{x}_i|^{q(p-1)} \; \forall i=1,\dots,n.$$

$$\Longleftrightarrow |\tilde{x}_i|^p = |\tilde{y}_i|^q \; \forall i=1,\dots,n \quad (\text{, da } p(q-1)=q \text{ und } q(p-1)=p)$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{x_i}{\|x\|_p}\right|^p = \left|\frac{y_i}{\|y\|_q}\right|^q \; \forall i=1,\dots,n$$

$$\Longleftrightarrow |x_i|^p = \underbrace{\frac{\|x\|_p^p}{\|y\|_q^q}}_{=:C} |y_i|^q \; \forall i=1,\dots,n$$

$(*)$ gilt also genau dann, wenn $|x_i|^p = C|y_i|^q \; \forall i=1,\dots,n$.

D.h. aber, daß $(|x_i|^p)_{i=1,\dots,n}$ und $(|y_i|^q)_{i=1,\dots,n}$ linear abhängig sind.

Aufgabe 3: 1. Zuerst zeigen wir: $S^{n-1} \subseteq$ (Rand von $U_1(0)$.)

Wir müssten lediglich zeigen, daß jedes $x \in S^{n-1}$ ein Berührpunkt von $U_1(0)$ ist. Denn wegen $x \notin U_1(0)$, kann x kein innerer Punkt sein und muß als Berührpunkt folglich zum Rand gehören. Sei also $x \in S^{n-1}$ beliebig und $0 < \varepsilon < 2$. Dann ist $y := (1 - \frac{\varepsilon}{2})x \in U_\varepsilon(x)$, weil $\|x-y\|_2 = \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\|x\|_2}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2}$. Andererseits ist:

$$\|y\|_2 = \|(1-\tfrac{\varepsilon}{2})x\|_2 = 1 - \tfrac{\varepsilon}{2} < 1.$$ Also folgt $y \in U_1(0)$.

Daher ist $U_1(0) \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Der Fall, daß $\varepsilon \geq 2$, ist trivial, weil dann $U_\varepsilon(x) \cap U_1(0) \supseteq U_1(0)$, denn:

$$\forall y \in U_1(0): \quad \|y-x\|_2 \leq \|y\|_2 + \|x\|_2 \leq 2.$$

Somit folgt $S^{n-1} \subseteq$ (Rand von $U_1(0)$).

2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 > 1$. Setze $\varepsilon := \frac{\|x\|_2 - 1}{2} > 0$.

$\Rightarrow$ $U_\varepsilon(x) \cap U_1(0) = \emptyset$, denn $\forall y \in U_\varepsilon(x)$ gilt:

$$\|x-y\|_2 \leq \frac{\|x\|_2 - 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \|y\|_2 \geq \frac{\|x\|_2 + 1}{2} > 1.$$

Folglich sind alle solche $x \in \mathbb{R}^n$ (d.h. mit $\|x\|_2 > 1$) keine Berührpunkte von $U_1(0)$.

Mit 1. folgt nun sofort, daß $K_1(0)$ der Abschluß von $U_1(0)$ sein muß, und S^{n-1} ist der Rand von beiden.

Aufgabe 4: 1. $\tilde{d}$ ist ein Metrik: Das sollte inzwischen jeder Teilnehmer des Kurses Analysis 2 sehen.

2. Z: $\tau_d = \tau_{\tilde{d}}$.

a) Wir zeigen $\tau_{\tilde{d}} \subseteq \tau_d$: Sei $U \in \tau_{\tilde{d}}$ und $x \in U$ beliebig.

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^{\tilde{d}}(x) \subset U$.

$\Rightarrow \exists\ 0 < \delta < 1$ mit $U_\delta^{\tilde{d}}(x) \subset U$.

Für $0 < \delta < 1$ ist aber $U_\delta^{\tilde{d}}(x) = U_\delta^{d}(x)$,
also $U_\delta^{d}(x) \subset U$. Somit ist x auch bzgl. d ein innerer Punkt von U. ~~x war~~ $x \in U$ war beliebig. Also sind alle Elemente von U innere Punkte von U bzgl. der Metrik d. D.h. aber: U ist offen bzgl. d, also $U \in \tau_d$.

b) Wir zeigen nun, daß $\tau_d \subseteq \tau_{\tilde{d}}$:
Sei $U \in \tau_d$ und $x \in U$ beliebig.
$\Rightarrow \exists\ 0 < \varepsilon < 1$: $U_\varepsilon^{d}(x) \subset U$. Da $U_\varepsilon^{d}(x) = U_\varepsilon^{\tilde{d}}(x)$, folgt wieder $U_\varepsilon^{\tilde{d}}(x) \subset U$. Wie oben erkennt man nun, daß $U \in \tau_{\tilde{d}}$, und daß daher $\tau_{\tilde{d}} \subseteq \tau_d$ (, denn U war beliebig aus τ_d gewählt.)

Insgesamt folgt aus a) und b): $\tau_d = \tau_{\tilde{d}}$.

Aufgabe 5: 1. $\underline{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d}$: Sei $U \in \mathcal{T}$. Wir zeigen: Zu jedem $x \in U$ $\exists\, \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon^d(x) \subset U$.

Sei also $x \in U$ beliebig. Da $U = \bigcup_{(C,D) \in \mathcal{P}} C \times D$ für ein $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B$, folgt $x = (x_A, x_B) \in C \times D$ für ein Paar $(C,D) \in \mathcal{P}$ mit $C \in \mathcal{T}_A$ und $D \in \mathcal{T}_B$.

$\Rightarrow$ Es existieren $\varepsilon_A > 0$ und $\varepsilon_B > 0$ mit $U_{\varepsilon_A}^{d_A}(x_A) \subseteq C$ und $U_{\varepsilon_B}^{d_B}(x_B) \subseteq D$.

Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^d(x) &= \{ y \in A \times B \mid d(x,y) < \varepsilon \} \\ &= \{ y = (y_A, y_B) \in A \times B \mid \max\{ d_A(x_A, y_A), d_B(x_B, y_B)\} < \varepsilon \} \\ &= U_\varepsilon^{d_A}(x_A) \times U_\varepsilon^{d_B}(x_B) \\ &\subseteq C \times D \subseteq U. \end{aligned}$$

Da $x \in U$ beliebig war, folgt daß U eine offene Menge bzgl. d ist, also $U \in \mathcal{T}_d$.

2. $\underline{\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}}$: Sei $U \in \mathcal{T}_d$ beliebig. Dann existiert zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon_x > 0$ derart, daß $U_{\varepsilon_x}^d(x) \subset U$.

Es folgt: $U = \bigcup_{x \in U} U_{\varepsilon_x}(x) \overset{\text{siehe oben}}{=} \bigcup_{x \in U} U_{\varepsilon_x}^{d_A}(x_A) \times U_{\varepsilon_x}^{d_B}(x_B)$

$$= \bigcup_{(C_x, D_x) \in \mathcal{P}} C_x \times D_x$$

mit $C_x := U^{d_A}_{\varepsilon_x}(x_A) \in \mathcal{T}_A$, $D_x := U^{d_B}_{\varepsilon_x}(x_B) \in \mathcal{T}_B$

und $\mathcal{P} := \{ (C_x, D_x) \mid x \in U \} \subseteq \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B$.

also $U \in \mathcal{T}$.