Lösungen des Hausaufgabenblattes 1

G.Svindland

Aufgabe 1: Es ist $\pi/6 = \arcsin(1/2)$. Die Taylorentwicklung von $\arcsin(x)$ um 0 lautet:

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2k-2)} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + R_{2k}(x)$$

mit

$$R_{2k} = k\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \frac{\theta}{\sqrt{1-x^2}^3}, \quad 0 < \theta < 1 .$$

(Für diese Abschätzung des Fehlers siehe z.B v. Mangoldt/Knopp 2ter Band)
Es folgt z.B. für $k = 2$:

$$|R_4| \leq 0,009375 .$$

Also genügt $k = 2$ der Berechnung von $\pi/6$ mit einem Fehler $\leq 1/100$. Wir erhalten $\pi/6 \approx 0,52$.

Aufgabe 2: Zuerst müssen wir die 4-malige Differenzierbarkeit von f an der Stelle 0 zeigen: g ist unendlich oft differenzierbar mit

$$g^{(n)}(t) = n \cdot \exp(t) + t \cdot \exp(t), \quad n \in \mathbb{N} .$$

Es ist also $g^n(0) = n \neq 0$ für $n \geq 1$. Mit Satz 4.4 (Analysis 1) folgt nun, daß f bei 0 mindestens einmal differenzierbar ist. Das berechtigt zu folgender Rechnung um 0:

$$g(f(t)) = t \Rightarrow f^{(1)}(t) = \frac{1}{g^{(1)}(f(t))} .$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist differenzierbar, da g zweimal und f mindestens einmal bei 0 differenzierbar sind. Damit folgt nun, daß f bei 0 zweimal differenzierbar sein muß:

$$f^{(2)}(t) = -\frac{1}{[g^{(1)}(f(t))]^2} \cdot g^{(2)}(f(t)) \cdot f^{(1)}(t) .$$

Eine Wiederholung der obigen Argumentation liefert die viermalige Differenzierbarkeit von f bei 0.
Ansatz: Wir wissen:

$$g(t) = t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3)$$

und

$$f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + o(t^3)$$

für $t \to 0$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nach Satz 6.2. Also muß

$$a + b(t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3)) + c(t + t^2 + o(t^2))^2 + d(t + o(t))^3 = t$$

sein. Ein Vergleich der Koeffizienten liefert $a = 0, b = 1, c = -1, d = 3/2$.

Aufgabe 3: $< x, y > := y^t Bx$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Daher ist $||\,.\,||$ eine Norm (siehe Lineare Algebra). Wähle z.B $k = 1/3$ und $K = 3$.

Aufgabe 4: $d(x, y) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 2 < \infty \quad \forall x, y \in M$. Für alle $x, y, z \in M$ gilt:

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow d_n(x_n, y_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n = y_n \; \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}(d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)) = d(x, z) + d(z, y)$.

Also ist (M, d) ein metrischer Raum.

Aufgabe 5: Parametrisierung der Ellipse:

$$v(t) = (\cos t, a \cdot \sin t)\,, \quad t \in]0, 2\pi[\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \beta \cos^2 t}\, dt\,, \qquad |\beta| < 1 \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} \beta^k \cos^{2k} t\, dt \qquad \text{(Binomialreihe)} \\
&= \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} \beta^k \int_0^{2\pi} \cos^{2k} t\, dt \qquad \text{(Satz 5.32)} \\
&= \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} \beta^k \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} 2\pi\,.
\end{aligned}$$

Eine Fehlerabschätzung für $\beta \geq 0$ liefert z.B.:

$$|R_n| \leq \left| \binom{1/2}{n+1} \right| \cdot |\beta|^{n+1} \cdot 2\pi\,.$$