Erinnerung / Ergänzung zur Linearen Algebra

Definition: Sei V ein K-Vektorraum. Der Raum

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

heißt *Dualraum* von V. Sind V und W K-Vektorräume und ist $L : V \to W$ eine lineare Abbildung, so heißt die lineare Abbildung

$$L^* : W^* \to V^*, \quad L^*(\mu) = \mu \circ L,$$

das *Duale* von L.

Lemma Seien V und W K-Vektorräume, $L : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\varphi \in V^*$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $\mathrm{Kern}\, L \subseteq \mathrm{Kern}\, \varphi$,

b) Es gibt $\mu \in W^*$ mit $\mu \circ L = \varphi$.
Anders gesagt: $\varphi \in \mathrm{Bild}\, L^*$.

Beweis: $\boxed{\text{b)}\Rightarrow\text{a)}}$ Es sei $\mu \circ L = \varphi$ und $v \in \mathrm{Kern}\, L$, d.h. $L(v) = 0$. Dann folgt $\varphi(v) = \mu(L(v)) = 0$, also $v \in \mathrm{Kern}\, \varphi$.

$\boxed{\text{a)}\Rightarrow\text{b)}}$ Wir definieren zunächst die Einschränkung $\kappa : \mathrm{Bild}\, L \to K$ der gesuchten linearen Abbildung $\mu : W \to K$ auf $\mathrm{Bild}\, L$. Sei hierzu $w \in \mathrm{Bild}\, L$. Wir wählen ein beliebiges $v \in V$ mit $L(v) = w$ und setzen $\kappa(w) := \varphi(v)$. Diese Definition hängt nicht von der Wahl von v ab. Ist nämlich $v' \in V$ ein anderer Vektor mit $L(v') = w$, so folgt $L(v - v') = L(v) - L(v') = 0$, also $v - v' \in \mathrm{Kern}\, L$ und daher $v - v' \in \mathrm{Kern}\, \varphi$ wegen unserer Annahme a). Hieraus folgt $\varphi(v) = \varphi(v')$, also die Wohldefiniertheit von $\kappa(w)$.

Die Abbildung $\kappa : \mathrm{Bild}\, L \to K$ ist linear(!), und es gilt $\kappa \circ L = \varphi$. Wir wählen eine beliebige lineare Fortsetzung $\mu : W \to K$ von $\kappa : \mathrm{Bild}\, L \to K$ und erhalten auch $\mu \circ L = \varphi$.