Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 8

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Von der differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$g(1,1) = 1,\ D_1 g(1,1) = -1,\ D_2 g(1,1) = 2.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = g(g(x, x^2), x^3)$ an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion

$$g:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 9z^2 + 4xy + 2xz - 2yz + x - 2y + z.$$

a) Bestimmen Sie den (einzigen) stationären Punkt von g.

b) Entscheiden Sie, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$g:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = e^{x^2 - xy}$$

an der Stelle $(0,0)$ bis zur 3. Ordnung, d.h. mit einem Fehlerterm der Form $o(||(x,y)||^3)$.

Aufgabe 4: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}\sin(x+y) + u &= x \\ \frac{1}{10}\sin(x-y) + v &= y \end{aligned}$$

besitzt für alle gegebenen $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung $(x(u,v), y(u,v)) \in \mathbb{R}^2$. Diese Lösung hängt sogar differenzierbar von (u,v) ab. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen)
Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ bei $(0,0)$ bis zur 2. Ordnung.

$(*)$ **Aufgabe 5:** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Es bezeichne $\mathcal{C}_b^k(U, \mathbb{R}^n)$ die Menge aller k-fach stetig differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^n$, für die alle partiellen

Ableitungen bis zur k-ten Stufe $D^\alpha f,\ \alpha \in \mathbb{N}^m,\ |\alpha| \leq k$, beschränkt sind. Wir definieren

$$|| \cdot || :\ \mathcal{C}_b^k(U, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ ||f|| := \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha| \leq k}} ||D^\alpha f||_\infty.$$

Dann ist $(\mathcal{C}_b^k(U, \mathbb{R}^n), || \cdot ||)$ ein normierter Raum. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)
Zeigen Sie: Dieser Raum ist ein Banachraum.

Abgabetermin: Spätestens am Dienstag, 14.06.05, um 11:00.