Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 7

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: In einem zylindrischen Becken der Grundfläche 1 wird Wasser eingeleitet: Die Wasserhöhe zum Zeitpunkt t wird mit $h(t)$ bezeichnet. Die Sauerstoffkonzentration $c(x,t)$ im Becken hänge von der Höhe x über dem Boden ($0 \leq x \leq h(t)$) und von der Zeit t ab.

a) Es sei $n(t)$ die zur Zeit t im Wasser insgesamt vorhandenen Sauerstoffmenge. Überlegen Sie sich, dass gilt:

$$n(t) = \int_0^{h(t)} c(x,t)\,dx$$

b) Zeigen Sie, dass die Änderungsgeschwindigkeit $\dot{n}(t)$ der Sauerstoffmenge durch

$$\dot{n}(t) = \int_0^{h(t)} \frac{\partial c}{\partial t}(x,t)\,dx + c\,(h(t),t) \cdot \dot{h}(t)$$

gegeben ist.
Hinweis: Zerlegen Sie: $n = p \circ q$ mit

$$\begin{aligned} q(t) &= (h(t),t)\ , \\ p(s,t) &= \int_0^s c(x,t)\,dx\ . \end{aligned}$$

Berechnen Sie erst dp und dq.
Sie dürfen dazu die Vertauschung von Integral und Ableitung nach einem Parameter

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^s c(x,t)\,dx = \int_0^s \frac{\partial c}{\partial t}(x,t)\,dx$$

anwenden.

c) Nun sei speziell (in zweckmässigen Einheiten)

$$h(t) = t \quad \text{und} \quad c(x,t) = \exp(x-2t)\ .$$

Berechnen Sie hierzu mit obiger Formel $\dot{n}(t)$ explizit.

d) Berechnen Sie zum Vergleich in dem eben betrachteten Spezialfall zunächst $n(t)$ explizit, und leiten Sie erst dann den erhaltenen Ausdruck nach t ab. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse!

Aufgabe 2: Erläutern Sie, warum der Gradient in die Richtung des stärksten Aufstiegs zeigt. Genauer: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Die Richtungsableitung von f bei x in Richtung eines Einheitsvektors $e \in \mathbb{R}^n$, $||e||_2 = 1$, ist genau dann am grösten, wenn e in Richtung des Gradientes zeigt: $\nabla f(x) = ||\nabla f(x)||_2 e$.

Aufgabe 3: Ein Asteroid fliegt der Erde vorbei. Seine Koordinaten zur Zeit t sind $r(t)$ (Abstand von der Erdmitte), $\theta(t)$ (Breitengrad) und $\phi(t)$ (Längengrad). Zeigen Sie: Die Geschwindigkeit des Asteroiden beträgt. $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}$. Benutzen Sie dazu die Umrechnung zwischen sphärischen Koordinaten und kartesischen Koordinaten:

$$(x, y, z) = (r\cos\theta\cos\phi,\ r\cos\theta\sin\phi,\ r\sin\theta).$$

Bemerkung: Das ist für die in der Geographie übliche Konvention für sphärischen Koordinaten. Andere Konventionen sind auch üblich.

($*$) **Aufgabe 4:** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 - y_3, & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= y_2 + y_3, & y_2(0) &= -1 \\ y_3' &= -y_2 + 3y_3, & y_3(0) &= 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Lineare Algebra, Blatt 5, Aufgabe 1.

Aufgabe 5: *Die Formel von Heun II.*
Die zweimal stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y),\ y(a) = b$, mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wir definieren folgende Näherung z an y:

$$z(a + h) := b + f\left(a + h, b + f(a, b)h\right)\frac{h}{2} + f(a, b)\frac{h}{2}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie

$$z(a + h) = y(a + h) + o(h^2) \quad \text{für} \quad h \to 0,$$

d.h. y und z haben die gleiche Taylorpolynome bis zur 2. Ordnung an der Stelle a.

Abgabetermin: Spätestens am Montag, 06.06.05, um 11:00.