Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 9

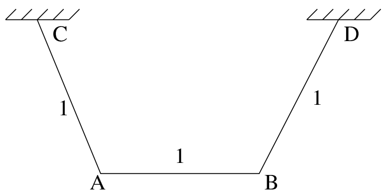
F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $N \subseteq \mathbb{R}^m$ k-dimensionale bzw. l-dimensionale glatte Submannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: $M \times N$ ist eine $k+l$-dimensionale Submannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2(1-x^2) = y^2\}$ ist keine Submannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, aber $M \setminus \{(0,0)\}$ ist eine 1-dimensionale glatte Submannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie M qualitativ.

Aufgabe 3: Zeigen Sie: $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \ A^t A = E\}$ ist eine Submannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit $T_E O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \ A^t = -A\}$

($*$) **Aufgabe 4:** Betrachten Sie folgende Figure aus 3 Stäbchen der Länge 1 in der Ebene, drehbar aufgehängt bei $C = (0,0)$ und $D = (2,0)$, mit Gelenken bei A und B. In der Gleichgewichtslage (A_0, B_0) ist die Figur symmetrisch wie gezeichnet. Betrachten Sie kleine Auslenkungen aus der Ruhelage:



a) Berechnen Sie Tangentialraum im Punkt (A_0, B_0) an den Raum $M \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ der zulässigen Konfigurationen (A, B).

b) In der Nähe der Gleichgewichtslage kann die y-Koordinate von B als eine Funktion der x-Koordinate von A geschrieben werden. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion ohne die Funktion explizit auszurechnen.

Abgabe: Spätestens am Dienstag 21.06.2005 um 11:00h.