Hausaufgabenblatt 13

Aufgabe 1 Induktion über n. Induktionsanfang klar.

„$n \to n+1$"

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) =$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \overset{IV}{=}$$

$$\sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \bigcap_{j \in J} A_j + \mu(A_{n+1}) - \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})}_{\overset{IV}{=}} =$$

$$\underbrace{- \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|+1} \bigcap_{j \in J} (A_j \cap A_{n+1})}_{=}$$

$$+ \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,n+1\},\ n+1 \in J \\ J \setminus \{n+1\} \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \bigcap_{j \in J} A_j$$

$$\sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,n+1\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \bigcap_{j \in J} A_j \quad .$$

Aufgabe 2

Seien $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt

mit $A = \bigcup_{\alpha=1}^{k} A_k$ und

$\forall i \in \{1, \dots, m\} \; \exists \, I_i \subset \{1, \dots, k\} : \; A_i = \bigcup_{\alpha \in I_i} C_\alpha$ sowie

$\forall i \in \{1, \dots, m\} \; \forall \alpha \in \{1, \dots, k\} \; C_\alpha \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow C_\alpha \subset A_i$.

Ebenso gibt es $D_1, \dots, D_\ell \in \mathcal{B}$ paarweise disjunkt

mit $B = \bigcup_{\beta=1}^{\ell} D_\beta$ und

$\forall i \in \{1, \dots, m\} \; \exists \, J_i \subset \{1, \dots, \ell\} : \; B_i = \bigcup_{\beta \in J_i} D_\beta$ sowie

$\forall i \in \{1, \dots, m\} \; \forall \beta \in \{1, \dots, \ell\} \; D_\beta \cap B_i \neq \emptyset \Rightarrow D_\beta \subset B_i$.

(Dass es so was gibt, ist eine kleine Übung für sich.)

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)}} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\Big(\dot{\bigcup_{\alpha \in I_i}} C_\alpha\Big) \cdot \nu\Big(\dot{\bigcup_{\beta \in J_i}} D_\beta\Big) \overset{\mu,\nu \text{ endl. additiv}}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in I_i} \sum_{\beta \in J_i} \mu(C_\alpha)\, \nu(D_\beta) \overset{(*)}{=}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{l} \mu(C_\alpha)\, \nu(D_\beta) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \mu(C_\alpha) \sum_{\beta=1}^{l} \nu(D_\beta) =$$

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{\alpha=1}^{k}} C_\alpha\Big) \cdot \mu\Big(\dot{\bigcup_{\beta=1}^{l}} D_\beta\Big) = \underline{\underline{\mu(A)\, \mu(B)}}$$

zu (*)

wegen $A \times B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i \times B_i$ gilt :

$$\forall \alpha, \beta \ \exists_1 i \quad C_\alpha \times D_\beta \subseteq A_i \times B_i ,$$

somit

$$\{1,\dots,k\} \times \{1,\dots,l\} = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} I_i \times J_i$$

Daraus folgt (*) .

Aufgabe 3

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ ist $\cap$-stabil: Seien $A, B \in \bigcup \mathcal{A}_n$,

d.h. es gibt k mit $A \in \mathcal{A}_k$ und l mit $B \in \mathcal{A}_l$.

Da $(\mathcal{A}_n)$ aufsteigend, sind dann sowohl A als auch B

in $\mathcal{A}_{\max(k,l)}$, somit $A \cap B \in \mathcal{A}_{\max(k,l)} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

Ferner gilt: $\mathcal{D} = \{ A \in \mathcal{A} \,/\, \mu(A) \in \{0,1\} \}$ ist

ein Dynkin-System: $\emptyset \in \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$ klar.

Seien nun

A_n p.d., $A_n \in \mathcal{D}$ 1. Fall: $\forall n\ \mu(A_n) = 0$

$\Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$. 2. Fall $\exists n\ \mu(A_n) = 1$

$\Rightarrow \mu(\bigcup A_n) = 1$. □

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \cap\text{-stabil}}}{\bigcup \mathcal{A}_n \subset \mathcal{D}} \quad \underset{\substack{| \\ \text{Dynkin-Lemma}}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\sigma\left(\bigcup \mathcal{A}_n\right)}_{\substack{\shortparallel \\ \mathcal{A}}} \subset \mathcal{D}$$ □

Aufgabe 4

Setze $B_1 = A_1$ und für $n > 1$

$B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$. Dann sind die B_n

paarweise disjunkt mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ und $\bigcup_{i=1}^{n} A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_n$.

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \to \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup B_n\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup A_n\right)$$ □