Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 13

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < +\infty$. Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie die sogenannte *Siebformel*:

$$\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|+1} \mu\left(\cap_{j \in J} A_j\right).$$

Aufgabe 2. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Lambda, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und $\nu(\Lambda) < +\infty$. Seien $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ und $B, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, so dass die Produkte $A_i \times B_i$ paarweise disjunkt sind. Es gelte weiter:

$$A \times B = \cup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i).$$

Zeigen Sie:

$$\mu(A) \cdot \nu(B) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i).$$

Bemerkung: Die σ-Additivität von μ und ν wird eigentlich nicht benötigt; endliche Additivität auf Mengenalgebren genügt.

Aufgabe 3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei weiter $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren mit

$$\sigma\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n, \Omega\right) = \mathcal{A}.$$

Es gelte: $\forall n \forall A \in \mathcal{A}_n : \mu(A) \in \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) \in \{0, 1\}.$$

Aufgabe 4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n).$$

Abgabetermin: spätestens bis Dienstag, den 12.07.05, um 11:00