Lösungsvorschlag für Hausaufgabenblatt 12

Josef Beiser

Aufgabe 1 Da $\omega = df$, mit $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$, gilt

$$\int_{e_1} \omega = f(e_1(1)) - f(e_1(0)) = 1; \quad \int_{e_2} \omega = f(e_2(1)) - f(e_2(0)) = 1$$

$$\tilde{\omega} \circ e_1(t) = (3t^2 + t, t) \qquad De_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\omega} \circ e_2(t) = (3t^4 + t, -t^2 + 2t) \qquad De_2(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{e_1} \tilde{\omega} = \int_0^1 \tilde{\omega} \circ e_1(t) \cdot De_1(t)\, dt = \int_0^1 3t^2 + 2t \, dt = 2$$

$$\int_{e_2} \tilde{\omega} = \int_0^1 \tilde{\omega} \circ e_2(t)\, De_2(t)\, dt = \int_0^1 6t^5 + 2t^2 - t^2 + 2t \, dt$$

$$= \int_0^1 6t^5 + t^2 + 2t \, dt$$

$$= \left[t^6 + \frac{1}{3} t^3 + t^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{7}{3}.$$

Aufgabe 2 $\quad \Phi$ geschlossen, $\omega - \tilde{\omega} \in B^1(U)$

$$\Rightarrow \quad \int_\Phi \omega - \tilde{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Phi \omega = \int_\Phi \tilde{\omega}$$

Linearität des Wegintegrals, diese folgt unmittelbar aus der Definition.

Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $Z^1(U)$:

$$\omega \sim \omega' \Leftrightarrow \omega - \omega' \in B^1(U)$$

Nach obigem gilt $\quad \omega \sim \omega' \Rightarrow \int_\Phi \omega = \int_\Phi \tilde{\omega}$,

deshalb ist I wohldefiniert.

Aufgabe 3:

Annahme: es gebt einen Diffeomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Die Abbildung $\Phi: \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist eine Homotopie

$$(x,t) \mapsto xt$$

mit $\Phi(x,0) = 0$ und $\Phi(x,1) = x$. Setze

$$F: (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times [0,1]$$

$$(x,t) \mapsto (f^{-1}(x), t).$$

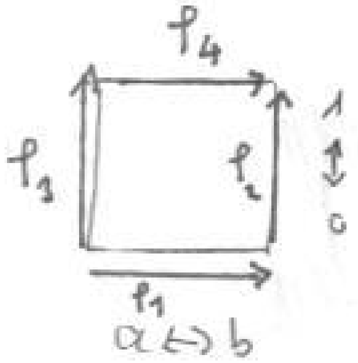
Dann ist $f \circ \Phi \circ F: (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

eine Homotopie mit $f \circ \Phi \circ F(x,0) = f(0)$ und

$$f \circ \Phi \circ F(x,1) = x.$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist zusammenziehbar $\lightning$

Aufgabe 4:



$$\xrightarrow{\Psi} U \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}^m$$

zunächst: $\Psi^*\omega \in Z^1([0,1]\times[a,b])$, da ω geschlossen,

somit $\Psi^*\omega \in B^1([0,1]\times[a,b])$, da $[0,1]\times[a,b]$ zusammenziehbar.

dann: $\Psi \restriction f_2$ konstant $\Rightarrow$ $\Psi^*\omega \restriction f_2$ konstant,

das Gleiche gilt für f_3.

Für f_1 betrachte man die Parametrisierung $[a,b] \to \mathbb{R}^2$

$x \mapsto (0,x)$

f_4 $\quad x \mapsto (1,x)$

$$\Psi \circ f_1 = \Phi_0, \quad \Psi \circ f_4 = \Phi_1$$

$$\int_{\Phi_0} \omega = \int_{\Psi\circ f_1} \omega = \int_{f_1} \Psi^*\omega = \int_{f_1, f_2} \Psi^*\omega =$$

$$\int_{f_3, f_4} \Psi^*\omega = \int_{f_4} \Psi^*\omega = \int_{\Phi_0} \omega.$$

Aufgabe 5 I ist wegen der Linearität des Wegintegrals linear. Da es $w \in Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gibt mit $\int_e w \neq 0$ und da I linear, ist I surjektiv. Für die Injektivität von I ist zu zeigen: für $w \in Z^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gilt: $\int_e w = 0 \Rightarrow w \in B^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Setze $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty[\times \mathbb{R}$, $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty,0] \times \mathbb{R}$

$w_1 = w \restriction U_1$, $w_2 = w \restriction U_2$, $w_1 = df_1$, $w = df_2$

Wir wissen: $f_1 - f_2 = c$ auf $]-\infty,0[\times \mathbb{R}$

$f_1 - f_2 = d$ auf $]0,\infty[\times \mathbb{R}$ für $c, d \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen zunächst: $c = d$.