

## Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 12

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

**Aufgabe 1.** Gegeben seien die Wege

$$e_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x)^t;$$

$$e_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x^2, x)^t.$$

Berechnen Sie die Wegintegrale  $\int_{e_i} \omega$  und  $\int_{e_i} \tilde{\omega}$ , für  $i \in \{1, 2\}$  wobei  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$  die auf Übungsblatt 11 definierten Differentialformen sind.

**Aufgabe 2.** Sei  $\Phi : [a, b] \rightarrow U$  ein geschlossener (d.h.  $\Phi(a) = \Phi(b)$ ), glatter Weg in eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass für alle  $\omega, \tilde{\omega} \in Z^1(U)$  mit  $\omega - \tilde{\omega} \in B^1(U)$  gilt:

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{\Phi} \tilde{\omega}.$$

Folgern Sie daraus, dass die Abbildung

$$I : H^1(U) \rightarrow \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_{\Phi} \omega$$

wohldefiniert ist.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, dass es keinen glatten Diffeomorphismus  $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt.

**Aufgabe 4.\*** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und seien  $\Phi_0, \Phi_1 : [a, b] \rightarrow U$  glatte, geschlossene Wege in  $U$  mit  $\Phi_0(a) = \Phi_1(a) = \Phi_0(b) = \Phi_1(b) = z$  für ein  $z \in U$ . Weiter sei  $\Psi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$  eine glatte Homotopie von  $\Phi_0$  nach  $\Phi_1$  mit

$$\Psi(t, a) = \Psi(t, b) = z$$

für alle  $t \in [0, 1]$ . Zeigen Sie, dass für alle  $\omega \in Z^1(U)$  gilt:

$$\int_{\Phi_0} \omega = \int_{\Phi_1} \omega.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass  $\Psi^*\omega$  exakt ist.

**Aufgabe 5\*.** Sei  $e$  der positiv orientierte Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$I : H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_e \omega$$

ein Isomorphismus ist.

Hinweis: Für den Nachweis der Injektivität von  $I$  ist Aufgabe 1 des aktuellen Übungsblattes sehr hilfreich.

Abgabetermin: spätestens bis Dienstag, den 05.07.05, um 11:00