×

Hausaufgabenblatt 11 Josef Berger

Aufgabe 1a :

ZZ : $f_1 \circ \Phi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, $\Phi_1 \circ f_1 = \mathrm{Id}_{S^2 \setminus \{(0,0,1)\}}$

daraus folgt, dass f_1 und Φ_1 bijektiv sind und dass Φ_1 die Inverse von f_1 ist.

Der Nachweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen.

Aufgabe 1 b: Offenbar ist $\{ S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \}$ eine offene Überdeckung von S^2. Zu zeigen bleibt also, dass f_1 und f_2 Karten sind. Wir zeigen dies für f_1. Da die Komponenten sowohl von f_1 als auch von Φ_1 Quotienten von stetig diffbaren Funktionen sind, ist Φ_1 stetig diffbar.

Zu zeigen bleibt : $\mathrm{rg}\, D(f_1^{-1}) = \mathrm{rg}\, D(\Phi_1) = 2$.

mit $n = u^2+v^2+1$ erhalten wir

$$D\Phi_1(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{2n-4u^2}{n^2} & \frac{-4uv}{n^2} \\ \frac{-4uv}{n^2} & \frac{2n-4v^2}{n^2} \\ \frac{+4u}{n^2} & \frac{4v}{n^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{n^2} \begin{pmatrix} n-2u^2 & -2uv \\ -2uv & n-2v^2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{n^2} \begin{pmatrix} -u^2+v^2+1 & -2uv \\ -2uv & u^2-v^2+1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

<u>1. Fall</u>: $u^2+v^2 \neq 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} n-2u^2 & -2uv \\ -2uv & n-2v^2 \end{vmatrix} = n(-u^2-v^2+1) \neq 0$

$\Rightarrow$ Rang $D\Phi_1(u,v) = 2$

<u>2. Fall</u>: $u^2+v^2 = 1$, $u \neq 0 \Rightarrow n = 2$

$$\begin{vmatrix} -2uv & 2-2v^2 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = -4uv^2 - 4u + 4uv^2 = -4u \neq 0$$

<u>3. Fall</u>: $v^2+v^2=1$, $u=0 \Rightarrow v=1$, $n=2$

$D\Phi_1(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat Rang 2.

Aufgabe 2 einfaches Nachrechnen

Aufgabe 3 Sei $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$A = D\Phi(u,v)$$

Wir zeigen: $A^t A = \lambda \cdot E_2$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann

folgt $\arccos(x,y) = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \dfrac{\langle A^t A x, y \rangle}{\|Ax\| \|Ay\|}$

$$= \frac{\langle Ax, Ay \rangle}{\|Ax\| \|Ay\|} = \arccos(Ax, Ay) \qquad \square$$

$$A^{+}A = \frac{4}{n^4} \begin{pmatrix} n-2u^2 & -2uv & 2u \\ -2uv & n-2v^2 & 2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-2u^2 & -2uv \\ -2uv & n-2v^2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} =$$

$$\frac{4}{n^4} \begin{pmatrix} \underbrace{(n-2u^2)^2+4u^2v^2+4u^2}_{\alpha(u,v)} & \underbrace{-4uvn+4u^3v+4uv^3+4uv}_{\beta(u,v)} \\ -4uvn+4u^3v+4uv^3+4uv & 4uv^2+(n-2v^2)^2+4v^2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{4}{n^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} n^2 = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

X

$\boxed{\text{Aufgabe } 4}$: $f(x,y,z) = 2y - x$

Setze $h_1(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 2yz$

$h_2(x,y,z) = y - x$

$E = \{(x,y,z) / h_1(x,y,z) = 25$ und $h_2(x,y,z) = 3\}$

Gesucht sind die Extrema von f auf E, d.h. unter den Nebenbedingungen $h_1 = 25$, $h_2 = 3$. Wir können annehmen, dass diese existieren. Es gibt also reelle Zahlen μ_1, μ_2 mit

$$\nabla f = \mu_1 \nabla h_1 + \mu_2 \nabla h_2, \quad \text{also}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 6x - 4y + 2z \\ -4x + 4y - 2z \\ 2x - 2y + 2z \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rangbed.!
$\mathrm{Rg}\, D\binom{h_1}{h_2} = 2$.

$h_2(x,y,z) = 0 \Rightarrow y = x + 3 \quad (1)$

$\mu_1 \neq 0$, weil die Annahme $\mu_1 = 0$ den ersten beiden Zeilen des obigen Gleichungssystems widersprechen würde. Somit, mit der dritten Zeile, folgt $2x - 2y + 2z = 0$. Mit (1) folgt $z = 3$.

(2) (3)

Mit (1) und (2) schreibt sich

$$h_1(x,y,z) = 25 \text{ als}$$

$x^2 = 16$, hat also Lösungen $x_1 = 4$
$x_2 = -4$

Kandidaten für Extremstellen von f sind also

$(4,7,3)$ und $(-4,-1,3)$.

Da $f(4,7,3) = 10$, nimmt f bei
$f(-4,-1,3) = 2$

$(4,7,3)$ sein Maximum und bei

$(-4,-1,3)$ sein Minimum an.

Aufgabe 5 Sei $c \in M$ und sei (c_n) eine Folge in M

mit $c_n \xrightarrow{n \to \infty} c$ und $c_n \neq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Setze $$g_n(x) = \frac{f(x, c_n) - f(x, c)}{c_n - c} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, c).$$

Dann gilt $g_n \xrightarrow{n \to \infty} g$ punktweise auf $[a, b]$, also gilt

$g_n \xrightarrow{n \to \infty} g$ sogar gleichmäßig, wegen ~~[illegible]~~ siehe Seite 8.

Somit erhalten wir $\int_a^b g_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$, also

wegen der Linearität des Integrals

$$\frac{\int_a^b f(x, c_n)\,dx - \int_a^b f(x, c)\,dx}{c_n - c} \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, c)\,dx$$

$$\|$$

$$\frac{F(c_n) - F(c)}{c_n - c}$$

Die Folge (c_n) war beliebig gewählt.

Daraus folgt, dass F bei c diffbar ist und $F'(c) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, c)\,dx$.

7.7. $g_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{} g$, $c \in M \subset \mathbb{R}$ offen, d.h. $\exists\, r > 0 \;\; K_r(c) \subset M$. Wähle

o.E.d.A. $(c_n) \subset \overline{K_r(c)}$ mit $c_n \to c$

Aufgabe 5

Sei $\varepsilon > 0$; da $\frac{\partial f}{\partial t}$ stetig ist und $[a,b] \times \overline{K_r(c)}$ kompakt, ist $\frac{\partial f}{\partial t}$ auf

$[a,b] \times \overline{K_r(c)}$ gleichmäßig stetig, d.h. es gibt $\delta > 0$, sodaß

$\forall\, (x_1,t_1), (x_2,t_2) \in [a,b] \times \overline{K_r(c)}$: $\|(x_1,t_1) - (x_2,t_2)\| < \delta$: $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x_1,t_1) - \frac{\partial f}{\partial t}(x_2,t_2) \right| < \varepsilon$

Insbesondere: $\forall x \in [a,b]$: $\forall t \in \overline{K_r(c)}$: $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_1) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_2) \right| < \varepsilon$

Also gibt es wegen $c_n \to c$ ein N, $\forall n \geq N$: $|c_n - c| < \delta$, ...

d.h. $\forall x \in [a,b]$ $\forall n \geq N$

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \frac{f(x,c_n) - f(x,c)}{c_n - c} - \frac{\partial f}{\partial t}(x,c) \right| =$$

$$\overset{!}{=} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_n(x)) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,c) \right| < \varepsilon \quad \text{, da ja } |\xi_n(x) - c| \leq |c_n - c| < \delta$$

MWS der Diff.rechnung f. $\frac{\partial f}{\partial t}(x,\cdot)$ mit

einem $\xi_n(x) \in \operatorname{conv}(c_n, c) \subseteq \overline{K_r(c)}$

Also konvergiert (g_n) gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen g.