Übungen zur Analysis II, Hausaufgabenblatt 11[1]

F. Merkl, J. Berger, Y. Bregman, G. Svindland

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass

$$\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to S^2 \backslash \{(0,0,1)\},\ (u,v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right)$$

bzw.

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to S^2 \backslash \{(0,0,-1)\},\ (u,v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1} \right)$$

die Inversen der in der Vorlesung definierten stereographischen Projektionen φ_1 bzw. φ_1 sind. (Es reicht, dies für φ_1 zu zeigen.)

b) Zeigen Sie, dass die stereographischen Projektionen einen Atlas der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der Kartenwechsel bezüglich der stereographischen Projektionen (siehe Aufgabe 1) durch

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 3. (*Winkeltreue der stereographischen Projektionen.*) Seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und sei $z \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen v und w gleich dem Winkel zwischen $D(\varphi_1^{-1})(z)v$ und $D(\varphi_1^{-1})(z)w$ ist.

Aufgabe 4. Das durch die Gleichung

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 2yz = 25$$

beschriebene Ellipsoid im Raum $\mathbb{R}^3$ schneidet die durch die Gleichung $y - x = 3$ beschriebene Ebene in einer Ellipse E. Die Funktion $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2y - x$ nimmt ein Maximum und ein Minimum auf E an. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)
Berechnen Sie die Stellen $(x,y,z) \in E$, an denen die Extrema angenommen werden, und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

[1] Wir überspringen bei der Nummerierung der Hausaufgabenblätter die Nummer 10.

Aufgabe 5. Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und sei M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Abbildung

$$f : [a, b] \times M \to \mathbb{R},\ (x, t) \mapsto f(x, t)$$

sei stetig und nach dem zweiten Argument partiell differenzierbar. Auch die partielle Ableitung $D_2 f$ sei stetig. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F : M \to \mathbb{R},\ c \mapsto \int_a^b f(x, c)dx$$

auf M differenzierbar ist und dass für alle $c \in M$ gilt:

$$F'(c) = \int_a^b D_2 f(x, c)dx.$$

(Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich gleichmäßig stetig sind.)

Abgabetermin: spätestens bis Dienstag, den 28.06.05, um 11:00