Flächen im $\mathbb{R}^3$

Möglichkeiten zur Beschreibung einer Fläche $\Phi \subset \mathbb{R}^3$:

- als *Graph* einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R} :$$

$$\Phi = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$$

Manchmal kann so die Fläche nur stückweise beschrieben werden.

- durch *Parametrisierung* mit einer Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \supseteq V \to \mathbb{R}^3 :$$

$$\Phi = \{g(u, v) \mid (u, v) \in V\}$$

- als *Niveaufläche* einer Funktion

$$h : \mathbb{R}^3 \supseteq W \to \mathbb{R} :$$

$$\Phi = \{(x, y, z) \in W \mid h(x, y, z) = c\}$$

Spezialfall $c = 0$: *Nullstellengebilde* von h.

Beispiel: Sphäre S^2

- *als Graph:* obere bzw. untere Halbkugel

$$S_{\pm}^2 = \left\{ \left(x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Hier gibt es "Singularitäten" am Äquator.

- *parametrisiert* mit Längen- und Breitenkreisen:

$$S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix} \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq v \leq 2\pi \right\}$$

Hier gibt es "Singularitäten" am Nord- und Südpol.

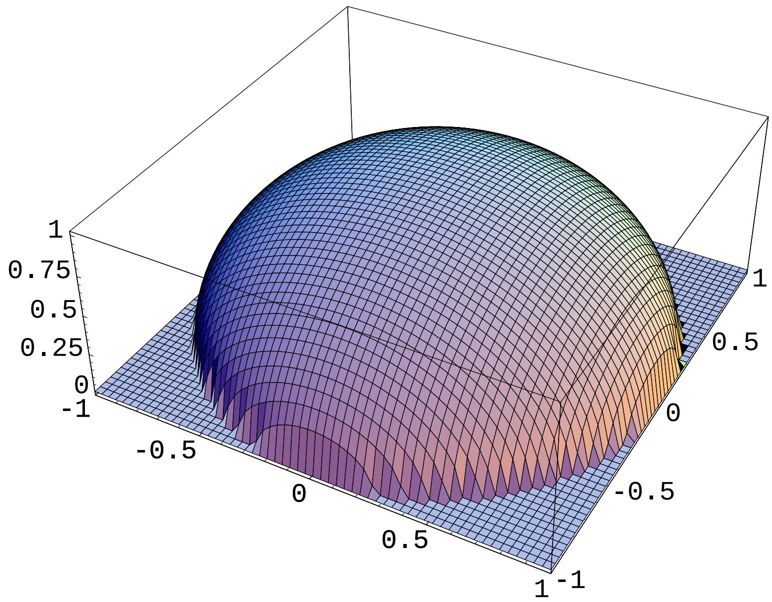
- *als Nullstellengebilde:*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

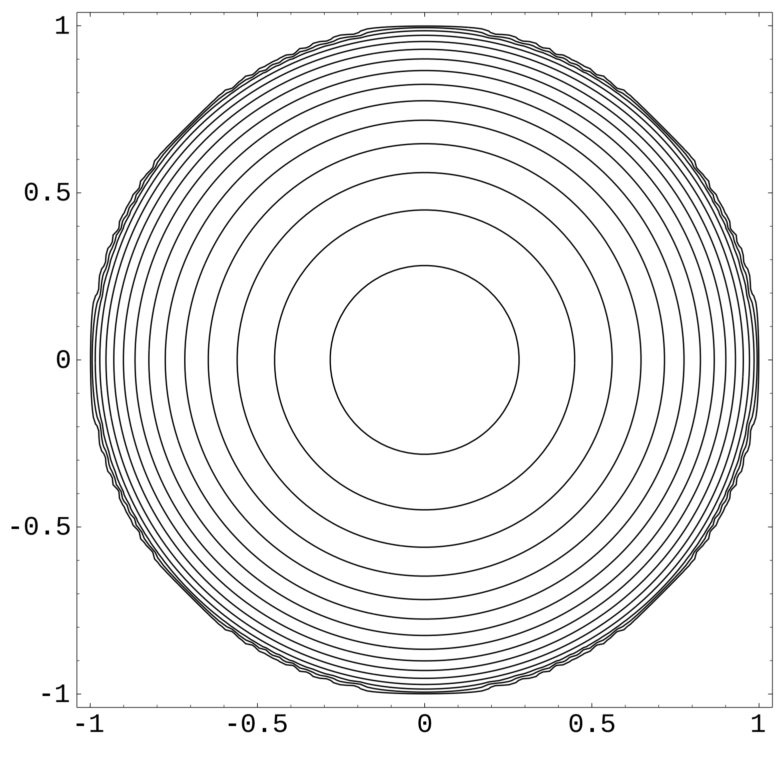
(singularitätenfrei)

Möglichkeiten zur graphischen Darstellung:

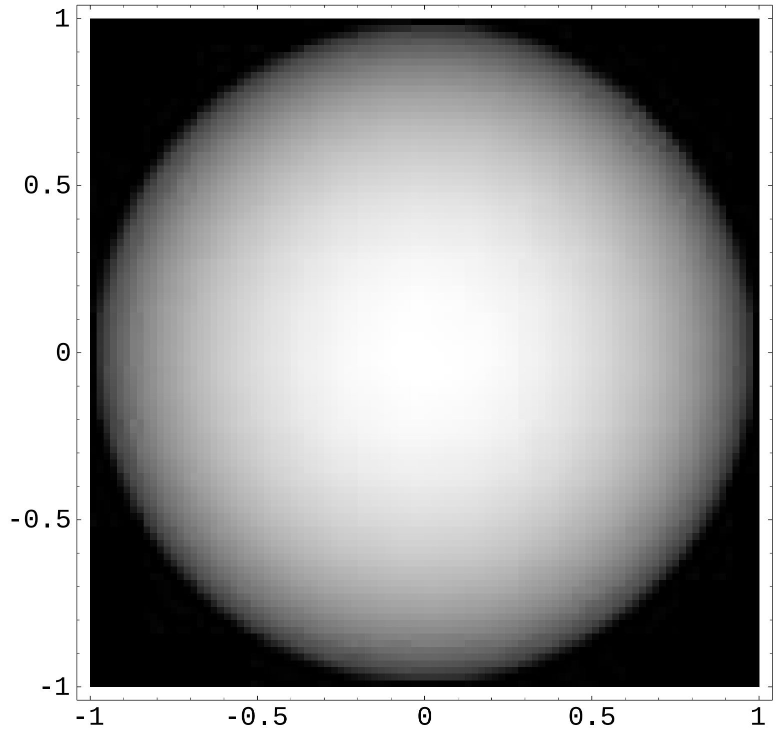
- *perspektivisch als Graph mit Koordinatenlinien:*



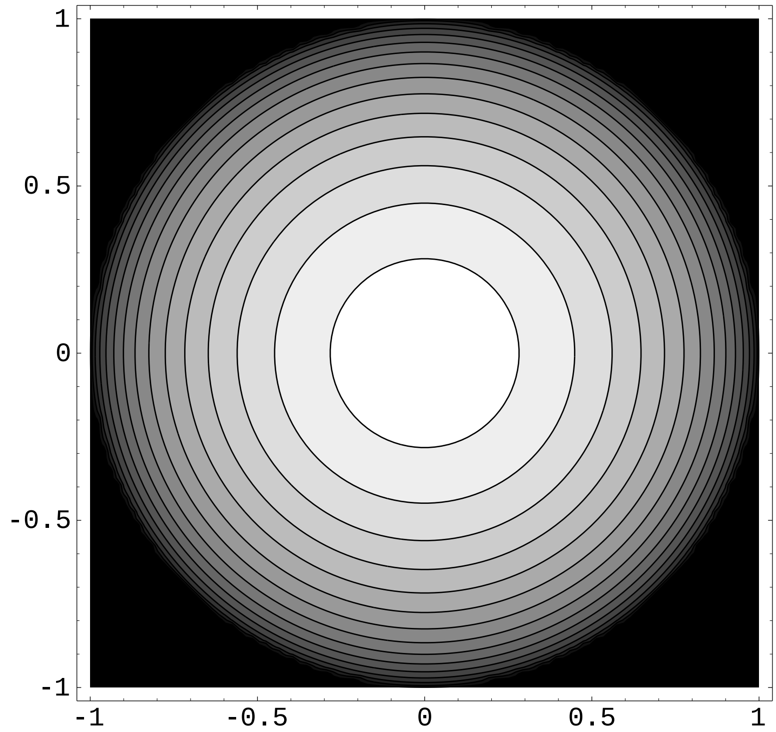
- *Niveaulinien, "Höhenlinien":*



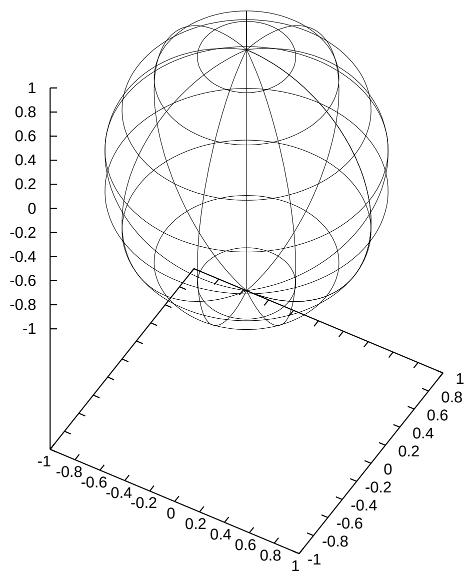
- *Graustufengraphik, "Dichteplot":*



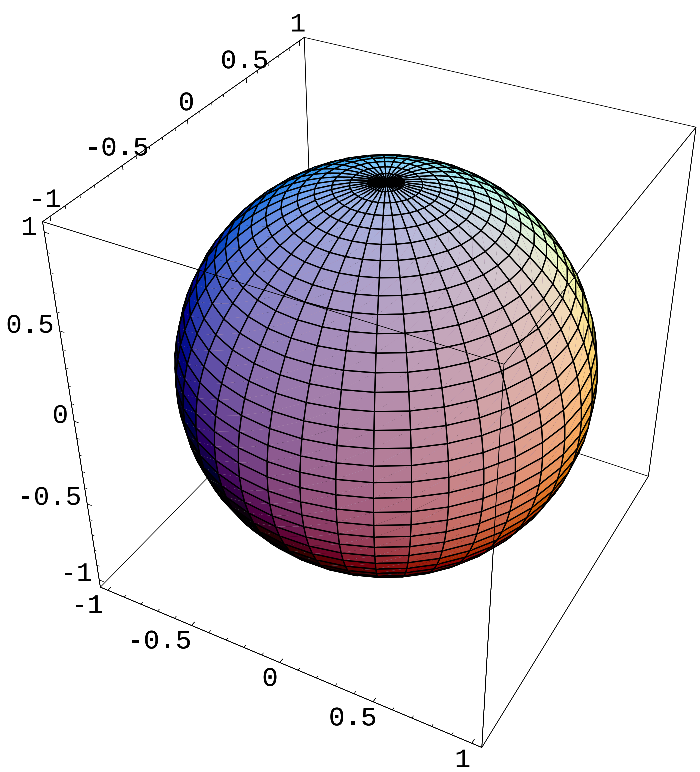
- *Kombination von Graustufen mit Höhenlinien:*



- *parametrisiert, perspektivisch, mit Koordinatenlinien:*



- *parametrisiert, perspektivisch, mit Schattierungen:*



heuristischer Ausblick und Verallgemeinerung: d-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Möglichkeiten zur Beschreibung eines d-dimensionalen Gebildes $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, $d \leq n$:

- als *Graph* einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^d \supseteq U \to \mathbb{R}^{n-d} :$$

$$\Phi = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$$

Manchmal kann so eine Untermannigfaltigkeit nur stückweise und nach Umordnung der Koordinaten beschrieben werden.

- durch *Parametrisierung* mit einer Funktion

$$g : \mathbb{R}^d \supseteq V \to \mathbb{R}^n :$$

$$\Phi = \{g(u) \mid u \in V\}$$

- als *Nullstellengebilde* einer Funktion

$$h : \mathbb{R}^n \supseteq W \to \mathbb{R}^{n-d} :$$

$$\Phi = \{x \in W \mid h(x) = 0\}$$

Die formale Definition einer Submannigfaltigkeit behandeln wir erst später, insbesondere den Ausschluß von “Singularitäten” und Fragen der “globalen” Beschreibung.

Spezialfälle: $d = 1$: Kurven, $d = 2$: Flächen, $d = n - 1$: Hyperflächen.