Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 9

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Wir betrachten die Schnittmenge C des Hyperboloids $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ mit der Ebene $2x + y - z = 5$ in $\mathbb{R}^3$ in der Nähe des Punktes $P_0 = (1, 2, -1)$. In der Nähe von P_0 wird C durch implizite Funktionen $(g_1(z), g_2(z), z)$ parametrisiert. Man berechne $g_1'(z)$ und $g_2'(z)$

a) ohne g_1 und g_2 explizit anzugeben

b) indem Sie g_1 und g_2 ausrechnen und ableiten.

Aufgabe 2: Es sei $J : GL(m, \mathbb{R}) \to GL(m, \mathbb{R}),\ J(A) = A^{-1}$. Berechnen Sie DJ.

Aufgabe 3: Es seien $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man drücke die Ableitung der Funktion $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ K(t) = f(g(t^2, \cos t), h(2t, t + 1))$ durch die partiellen Ableitungen von f, g und h aus.

$(*)$ **Aufgabe 4:** Betrachten Sie die Determinantenabbildung

$$\det : \ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

nahe bei der Einheitsmatrix E.
Zeigen Sie: $D\det(E)(A) = \operatorname{Spur} A,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Folgern Sie: $D\det(B)(A) = \operatorname{Spur}(AB^{-1})\det B$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in GL(n, \mathbb{R})$.