Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 8

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Von der differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$g(2,1) = 1,\ D_1 g(2,1) = 2,\ D_2 g(2,1) = 3.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = g(3x-1, g(4x-2, x^3))$$

an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = ((x+y)^2 - 1)^2 + (x-y)^2.$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

b) Entscheiden Sie, ob es sich um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

c) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f, insbesondere in der Nähe der stationären Punkte. Eine qualitative Skizze genügt.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{x \sin y}$ an der Stelle $(0,0)$ bis zur 3. Ordnung, d.h. mit einem Fehlerterm der Form $o(||(x,y)||^3)$.

Aufgabe 4: Eingeschränkt auf eine genügend kleine offene Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \left(\left\| x - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2, \left\| x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \right)$ injektiv mit einer Umkehrabbildung $g \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^2)$, wobei V eine kleine offene Umgebung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von g bei $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bis zur 2. Ordnung

a) ohne g explizit anzugeben,

b) indem Sie g explizit ausrechnen und dann ableiten.

($*$) **Aufgabe 5:** *Rotationsinvarianz des Laplaceoperators.*
Sei $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $U^t U = E$. Seien $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ mit $f(Ux) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $\triangle f(Ux) = \triangle g(x)$.