Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 7

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ g(x, y) = xy \ .$$

a) Berechnen Sie $Df(t)$ und $dg(x, y)$.

b) Berechnen Sie $g \circ f$ und $dg(f(t)) \cdot Df(t)$. Interpretieren Sie das Ergebnis!

c) Skizzieren Sie die Niveaulinie N von g zum Niveau 2.
Es sei p die Linearisierung von g bei $(x_0, y_0) = (2, 1) \in N$. Skizzieren Sie die Niveaulinie von p zum Niveau 2.
Zeichnen Sie $\nabla g(2, 1)$ in Ihre Skizze ein.
Beobachtungen?

Aufgabe 2: Wir betrachten eine Fläche, die durch eine injektive differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird. Ferner sei $f \circ \gamma$ eine parametrisierte Kurve auf dieser Fläche, wobei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar sei.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass die Länge dieser Kurve durch

$$L = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(s)^t g(\gamma(s))\gamma'(s)}\, ds$$

gegeben wird, wobei $g(x) = [Df(x)]^t Df(x)$.

b) Berechnen Sie die Kurvenlänge der Kurve mit der Parameterdarstellung $\gamma : u \to (z, \phi)^t = (u, 2\pi u)^t$, $u \in [0, 1]$, auf der durch $f : (z, \phi) \mapsto (x, y, z)^t = (\cos\phi, \sin\phi, z)^t$ parametrisierten Fäche.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$G : (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad G(f) = f(0)^3.$$

(∗) **Aufgabe 4:** Lösen Sie Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_1 \qquad\quad + 2y_3, \quad y_1(0) = 1\\
y_2' &= -y_1 + 3y_2 - y_3, \quad y_2(0) = 0\\
y_3' &= -y_1 + 2y_2 - y_3, \quad y_3(0) = -1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: *Die Formel von Heun.*
Die zweimal stetig differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y),\ y(a) = b$, mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wir definieren folgende Näherung z an y:

$$z(a+h) := b + f\left(a + \frac{h}{2}, b + f(a,b)\frac{h}{2}\right) h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie

$$z(a+h) = y(a+h) + o(h^2) \quad \text{für} \quad h \to 0,$$

d.h. y und z haben die gleiche Taylorpolynome bis zur 2. Ordnung an der Stelle a.