Übungen zur Analysis II, Übungsblatt 6

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1: Berechnen Sie $\frac{d}{dt}f(e^t, e^{2t})$, wenn $D_1 f, D_2 f$ gegeben sind.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Tangentialebene an das Hyperboloid $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ in $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ als Niveaugebilde.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Ableitung (Linearisierung) der Produktabbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ direkt mit Hilfe der Definition der Ableitung.

Aufgabe 4: Wir betrachten eine Fläche, die durch eine injektive differenzierbare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird. Ferner sei $f \circ \gamma$ eine parametrisierte Kurve auf dieser Fläche, wobei $\gamma: [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar sei.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass die Länge dieser Kurve durch

$$L = \int_0^1 \sqrt{\gamma'(s)^t g(\gamma(s))\gamma'(s)}\, ds$$

gegeben wird, wobei $g(x) = [Df(x)]^t Df(x)$.

b) Berechnen Sie die Kurvenlänge der Kurve mit der Parameterdarstellung $\gamma: u \to (z, \phi)^t = (u, 2\pi u)^t$, $u \in [0, 1]$, auf der durch $f: (z, \phi) \mapsto (x, y, z)^t = (\cos\phi, \sin\phi, z)^t$ parametrisierten Fäche.

(∗) **Aufgabe 5:** Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$G: (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad G(f) = f(0)^3.$$