Übungen zur Analysis II, Musterlösungen 6

F. Merkl, J.Berger,Y. Bregman, G.Svindland

Aufgabe 1:

$$\frac{d}{dt}f(e^t, e^{2t}) = D_1 f e^t + 2D_2 f e^{2t}.$$

Aufgabe 2: Sei $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$. Wir linearisieren $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \to x^2 - y^2 - z^2$: $dh(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 dx - 2y_0 dy - 2z_0 dz$. Damit erhalten wir die Tangentialebene als Niveaugebilde, beschrieben durch die Gleichung

$$dh(x_0, y_0, z_0)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

also

$$x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0.$$

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy$. Die Ableitung von f bei (x, y) ist nach Definition eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) - L(h)|}{||h||_2} = 0, \quad \text{wobei} \quad h^t = (h_1, h_2).$$

$$\lim\nolimits_{h\to 0} \quad \frac{|f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) - L(h)|}{||h||_2} = \lim_{h\to 0} \frac{|(x + h_1)(y + h_2) - xy - L(h)|}{||h||_2}$$

$$\lim\nolimits_{h\to 0} \quad \frac{|yh_1 + xh_2 - L(h) + h_1 h_2|}{||h||_2} = 0 \Rightarrow L(h) = yh_1 + xh_2.$$

Anders geschrieben $df(x, y) = ydx + xdy$.

Aufgabe 4:

a) Die Länge dieser Kurve wird durch

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 ||\frac{d}{dt} f(\gamma(t))||_2 dt = \int_0^1 \sqrt{||Df(\gamma(t))\gamma\prime(t)||_2^2} dt = \\ &= \int_0^1 \sqrt{(Df(\gamma(t))\gamma\prime(t))^t (Df(\gamma(t))\gamma\prime(t))} dt = \int_0^1 \sqrt{\gamma\prime(t)^t Df(\gamma(t))^t Df(\gamma(t))\gamma\prime(t)} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\gamma\prime(t)^t g(\gamma(t))\gamma\prime(t)} dt \end{aligned}$$

gegeben.

b) In diesem Beispiel ist

$$L = \int_0^1 \sqrt{(2\pi \sin 2\pi u)^2 + (2\pi \cos 2\pi u)^2 + 1}\; du = \sqrt{4\pi^2 + 1}.$$

$*$**Aufgabe 5:** Die Ableitung der Funktion

$$G: \ (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad G(f) = f(0)^3$$

bei $f \in \mathcal{C}[0,1]$ ist nach Definition eine lineare Abbildung $L: \ (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ derart, dass gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{|G(f+h) - G(f) - Lh|}{||h||_\infty} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{h \to 0} \quad \frac{|G(f+h) - G(f) - Lh|}{||h||_\infty} &= \frac{|(f(0)+h(0))^3 - f(0)^3 - Lh|}{||h||_\infty} \\ = \quad & \lim_{h \to 0} \frac{|3f(0)^2 h(0) + 3f(0)h(0)^2 + h(0)^3 - Lh|}{||h||_\infty}. \end{aligned}$$

Folglich ist $L = DG(f) = 3f(0)^2$, da

$$|h(0)|^2 \le ||h||_\infty^2 = o(||h||_\infty) \quad \text{und analog} \quad |h(0)|^3 \le ||h||_\infty^3 = o(||h||_\infty) \quad \text{für} \quad ||h||_\infty \to 0.$$