Tutorium 07

- Themen: Diffeomorphismen, Tangentialraum.
- Aufgabe (darf dann für Aufg. 4 auf dem Blatt verwendet werden): Male ein Bild, welches zeigt dass es für ein Intervall $(0,1)$ und zwei Punkte $x, y \in (0,1)$ einen Diffeomorphismus $f : (0,1) \longrightarrow (0,1)$ gibt, sodass $\varphi(x) = y$. (z.B. für $y > x$ so: Bis kurz vor x ist der Graph von f die Diagonale. Nahe x steigt er schnell an, bis $f(x) = y$ und danach Steigung sehr klein, sodass Graph kurz nach y wieder die Diagonale trifft.). Als Funktion: $t \mapsto t + \varphi(t)(y-x)$ wobei $\varphi(x) = 1$, $\varphi|_{(x-\epsilon, y+\epsilon)} = 0$ und $\dot{\varphi}(t) \geq 0$ für $t \leq x$ und $> -\frac{1}{y-x}$ für $t \geq x$ (letzteres damit $\dot{f}(t) > 0$.)
- Wiederholt Tangentialebenen und induzierte Abbildungen von differenzierbaren Abbildungen $f : S_1 \longrightarrow S_2$. (Beispiele ausrechnen, z.B. für S^2 und Drehung oder Spiegelung). Betont, dass es i.A. nicht sinnvoll ist Tangentialvektoren zu vergleichen, die in Tangentialräumen an verschiedenen Punkten liegen. (auch wenn bei uns nach Definition alle Tangentialräume in $\mathbb{R}^3$ liegen.) Andererseits: Für Abbildung $f : S_1 \longrightarrow S_1$ mit $f(p) = p$ kann man Eigenvektoren und Eigenwerte von df_p anschauen.
- Zeige dass für $0 < r < a$ die Abbildung $(\vartheta, \varphi) \longmapsto ((a + r\cos\vartheta)\cos\phi, (a + r\sin\vartheta)\sin\phi, r\sin\phi)$ aus dem Torus eine parametrisierte Fläche macht. Folgere dass jede doppelt periodische glatte Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung $T \longrightarrow \mathbb{R}$ induziert und dass doppelt periodische Abbildungen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ glatte Abbildungen $f : T \longrightarrow T$ induzieren. Wann sind letztere Diffeomorphismen? (Falls rang $f = 2$ und $f|_{[0,2\pi)^2}$ injektiv).
- Aufgabe: Berechne kritische Punkte der Abbildung $f : S^2 \longrightarrow R$, $(x,y,z) \longmapsto xy$.