LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1. Sei $\varphi(u, v)$ lokale Parametrisierung einer regulären Fläche. Zeigen Sie:

1. Falls φ ein Tschebyschow-Netz ist ($E = G = 1$, $F = \cos\theta$, vgl. Blatt 8 Aufg. 4) gilt für die Gaußkrümmung
$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}.$$
2. Für den Fall dass φ ein isothermes Koordinatensystem ist, d.h. $E = G = \lambda(u, v)$ für eine Funktion $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und $F = 0$, gilt
$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta(\log\lambda).$$
wobei für eine Funktion f auf U der Ausdruck $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ den Laplace-Operator bezeichnet.
3. Falls φ so ist, dass $E = G = (u^2 + v^2 + c)^{-2}$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und $F = 0$, so ist die Gaußkrümmung konstant
$$K \equiv 4c.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie dass eine kompakte reguläre Fläche für die alle Punkte elliptisch sind diffeomorph zur Sphäre S^2 ist.

Aufgabe 3. Sei S der Torus mit Radien $R > r$ und $U = (0, 2\pi)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\varphi : U \longrightarrow S$ die Parametrisierung
$$\varphi(u, v) = ((r\cos u + R)\cos v, (r\cos u + R)\sin v, r\sin u).$$
Berechnen Sie K und $\int_U K\ dudv$.

bitte wenden!

Aufgabe 4. (Rotationsflächen konstanter Krümmung)
Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Kurve wie in Aufgabe 1 Blatt 6, die injektiv ist und R_γ die zugehörige Rotationsfläche mit Parametrisierung

$$\varphi(u,v) = (\cos(u)\gamma_1(v), \sin(u)\gamma_1(v), \gamma_2(v))$$

Wir nehmen an, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist und dass die Gaußkrümmung K konstant ist. Zeigen Sie:

1. Für γ_1, γ_2 gelten die Gleichungen $\gamma_1'' + K\gamma_1 = 0$ und $\gamma_2 = \int \sqrt{1-\gamma_1'(v)}dv$, wobei der Definitionsbereich des letzten Integrals sinnvoll zu wählen ist.

2. Alle Rotationsflächen konstanter Krümmung $K = 1$, die die xy-Ebene senkrecht schneiden, sind gegeben durch
$$\gamma(v) = (C\cos v, \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sin^2 v}dv),$$
wobei $C = \gamma_1(0)$ eine Konstante ist. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von v und fertige eine Skizze vom Profil der Fläche in der xz-Ebene in den Fällen $C = 1$, $C > 1$, $C < 1$ an.

3. Alle Rotationsflächen mit konstanter Krümmung $K = -1$ sind auf eine der folgenden drei Arten gegeben:

   (a)
   $$\gamma(v) = (C\cosh v, \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sinh^2 v}dv)$$

   (b)
   $$\gamma(v) = (C\sinh v, \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2 v}dv)$$

   (c)
   $$\gamma(v) = (Ce^v, \int_0^v \sqrt{1 - e^{2v}}dv)$$

   Bestimmen Sie die Definitionsbereiche von v und fertigen Sie eine Skizze vom Profil der Flächen in der xz-Ebene an.