SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1. Sei S eine reguläre Fläche. Zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung H bei $p \in S$ durch

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k_n(\theta) d\theta$$

gegeben ist, wobei $k_n(\theta)$ die Normalkrümmung bei p längs einer Richtung ist, die mit einer festen Richtung den Winkel θ bildet.

Aufgabe 2. Falls eine reguläre Fläche S entlang einer Kurve γ zu einer Ebene E tangential liegt, dann sind die Punkte auf dieser Kurve entweder parabolisch oder Flachpunkte.

Aufgabe 3. Sei γ eine reguläre Kurve mit Krümmung κ auf einer regulären Fläche S mit Gauß-Krümmung $K > 0$.

- Zeigen Sie dass gilt
$$\kappa \geq \min(|k_1|, |k_2|)$$
- Angenommen für die Hauptkrümmungen von S gilt $|k_1| \leq 1$, $|k_2| \leq 1$. Gilt dann auch $|\kappa| \leq 1$?

Aufgabe 4. Betrachten Sie die parametrisierte Fläche (Enneperfläche)

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

Zeigen Sie:

1. Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform sind
$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2, \qquad F = 0$$
2. Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform sind
$$e = 2, g = -2, f = 0$$
3. Die Hauptkrümmungen sind
$$k_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \qquad k_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$