



LUDWIG-  
MAXIMILIANS-  
UNIVERSITÄT  
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel

Dr. Jonas Stelzig

## Geometrie und Topologie von Flächen

### Aufgabenblatt 8

**Aufgabe 1.** Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche und  $p \in S$ . Zeigen Sie:  $S \setminus \{p\}$  ist genau dann orientierbar wenn  $S$  es ist.

**Aufgabe 2.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Kurve wie in Blatt 6, Aufgabe 1, die injektiv ist und  $R_\gamma$  die zugehörige Rotationsfläche mit Parametrisierung

$$\varphi(\theta, s) = (\cos(\theta)\gamma_1(s), \sin(\theta)\gamma_1(s), \gamma_2(s))$$

1. Berechnen Sie die erste Fundamentalform in obiger Parametrisierung.
2. Zeigen Sie, dass man eine Parametrisierung von  $R_\gamma$  finden kann, sodass  $E$  nur von der zweiten Koordinate abhängt,  $F = 0$  und  $G = 1$ .
3. Sei  $\gamma$  nach Bogenlänge  $l$  parametrisiert. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt  $A$  von  $R_\gamma$  gilt:

$$A = 2\pi \int_0^l \gamma_1(s) ds$$

**Aufgabe 3.** Für eine lokale Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  einer regulären Fläche  $S$  und jeden Punkt  $(u_0, v_0) \in U$  heißen  $u \mapsto \varphi(u, v_0)$  und  $v \mapsto \varphi(u_0, v)$  **Koordinatenkurven** von  $\varphi$ . Man sagt, sie formen ein Tschebyschow-Netz, falls die Längen gegenüberliegender Seiten jedes von ihnen geformten Vierecks gleich lang sind. Zeigen Sie dass dies genau dann der Fall ist wenn  $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$  ist.

**Aufgabe 4.** Sei  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine lokale Parametrisierung einer Fläche  $S$ , sodass die Koordinatenkurven von  $\varphi$  ein Tschebyschow-Netz bilden. Zeigen Sie dass es möglich ist,  $U$  so umzuparametrisieren dass  $E = G = 1$ ,  $F = \cos \theta$ , wobei  $\theta$  der Winkel zwischen den Koordinatenkurven ist.

**Tipp:** Nutze Aufgabe 3, um die Koordinatenkurven nach Bogenlänge zu parametrisieren.

**Bonusaufgabe 5.** Lesen Sie die Wikipedia-Artikel über mindesten 5 verschiedene Parametrisierungen der (Erd-)Kugeloberfläche. Entscheiden Sie sich für ihren persönlichen Favoriten und gleichen Sie mit <https://xkcd.com/977/> ab.