SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1. (Rotationsflächen, I) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{aligned}$$

eine ebene C^∞-Kurve mit $\gamma_1(t) > 0$ für alle $t \in I$ und folgender Eigenschaft: Für jeden Punkt $p \in \operatorname{im}\gamma$ gibt es eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von p und ein Teilintervall $I' \subseteq I$ sodass $\gamma|_{I'} : I' \longrightarrow V \cap \operatorname{im}\gamma$ ein differenzierbarer Homöomorphismus mit injektivem Differential ist. Zeigen Sie:

$$R_\gamma = \{(\cos\varphi \cdot \gamma_1(s), \sin\varphi \cdot \gamma_1(s), \gamma_2(s)) \mid s \in I, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

ist eine reguläre Fläche.

Aufgabe 2. (Rotationsflächen, II) Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 1, zeigen Sie: Ist γ injektiv, so ist R_f diffeomorph zu einem Zylinder.

Aufgabe 3. (Hyperboloid und Sphäre) Seien $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ und $A := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + y^2 \geq z^2\}$. Malen Sie Bilder beider Mengen. Zeigen Sie, dass A und H reguläre Flächen sind und dass es Diffeomorphismen zwischen H, A und $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ gibt.

Aufgabe 4. (Rangsatz) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Funktion deren Differential in jedem Punkt Rang 2 hat. Zeigen Sie: Für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ existieren offene Teilmengen $p \in V \subseteq U$ und $V' \subseteq \mathbb{R}^2$, sowie Diffeomorphismen $\varphi : V \to V'$, $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sodass gilt:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, y, 0)$$