SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1. Seien $h, r \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie Krümmung und Torsion der Schraubenlinie:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (r\cos(t), r\sin(t), \frac{h}{2\pi}t) \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^3-Kurve sodass $\|\ddot{\gamma}(t)\| \neq 0 \ \forall t \in I$. Zeigen Sie: Falls für die Torsion $\tau = 0$ gilt, so liegt γ in einer Ebene.

Aufgabe 3. Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, die in der Kreisscheibe vom Radius R verläuft (d.h. $\|\gamma(t)\| \leq R$ für alle $t \in I$). In $t_0 \in I$ berühre die Kurve den Rand der Kreisscheibe, d.h. $\|\gamma(t_0)\| = R$. Zeigen Sie, dass für die Krümmung die folgende Ungleichung gilt:

$$\|\kappa(t_0)\| \geq \frac{1}{R}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\|\gamma(t)\|^2$ und $\frac{d^2}{dt^2}\|\gamma(t)\|^2$.

Aufgabe 4. Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine T-periodische, nach Bogenlänge parametrisierte C^1-Kurve, die eingebettet ist ($\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t - s \in \mathbb{Z}T$) und

$$A := \left\{ \left(\begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \end{array} \right) \middle| 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie:

i) Die Menge A ist sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte.

ii) Die Funktion e, definiert durch

$$\begin{aligned} e : A &\longrightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ (t_1, t_2) &\longmapsto \begin{cases} \frac{\gamma(t_2)-\gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\|} & \text{falls } t_1 < t_2 \text{ und } (t_1, t_2) \neq (0, T) \\ \dot{\gamma}(t) & \text{falls } t_1 = t_2 = t \\ -\dot{\gamma}(0) & \text{falls } (t_1, t_2) = (0, T). \end{cases} \end{aligned}$$

ist stetig.