SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1. Diese Aufgabe ist ein Experiment. Sie ist ein Beweis des folgenden Satzes in Form eines Lückentextes:

Satz: Sei $k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es eine, nach Bogenlänge parametrisierte, C^2-Kurve $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\kappa(t) = k(t).$$

γ ist eindeutig bestimmt bis auf orientierungserhaltende Euklidische Bewegungen in $\mathbb{R}^2$.

Beweis: Wir betrachten ein Anfangswertproblem bestehend aus dem System linearer Differentialgleichungen

$$(\gamma, v) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma(t) \\ v(t) \end{pmatrix}}_{\text{eine Spalte mit vier Eintr.}} = \begin{pmatrix} \underline{\qquad\quad} \\ \underline{\qquad\qquad\quad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} \\ \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} \\ \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} \\ \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} & \underline{\quad\;\;} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

sowie den Anfangsbedingungen (mit $c \in [a, b]$)

$$\gamma(c) = 0, v(c) = \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat dieses Anfangswertproblem ________________________________ mit _____________ Definitionsbereich. Bei linearen Differentialgleichungen stimmt der maximale Definitionsbereich der Lösung eines Anfangswertproblems mit ______________________________________ überein.

Die Lösung $(\gamma(t), v(t))$ liefert eine ebene Kurve ____ und es gilt $v(t) =$ ______ wegen der Differentialgleichung (1).

Es ist noch zu zeigen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle v(t), v(t)\rangle &= \underline{\qquad\qquad\quad} \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\quad}\,. \end{aligned}$$

Daher ist $\|v(t)\|^2$ __________ und es gilt $\|v(c)\| =$ ____ . Also ist γ nach Bogenlange parametrisiert.

Weiter ist noch zu prüfen, dass für die Krümmung κ von γ gilt ____________ . Wegen der Differentialgleichung (1) gilt

$$\ddot{\gamma}(t) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.$$

Das bedeutet $\kappa(t) = k(t)$.

Sei nun $\widehat{\gamma}$ eine weitere Kurve in $\mathbb{R}^2$ welche die Anforderungen des Satzes erfüllt. Dann gibt es eine __________ bestimmte, orientierungserhaltende Euklidische Bewegung $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sodass $\psi(\widehat{\gamma}(c)) =$ ______ und $D\psi(\dot{\widehat{\gamma}}(c)) =$ __________ . Wegen ____ gilt

$$\psi \circ \widehat{\gamma} = \gamma.$$

Aufgabe 2. (Allgemeine Definition der Krümmung) Für eine reguläre, zweimal stetig differenzierbare Kurve γ sei die Krümmung $\kappa(t)$ definiert als

$$\kappa(t) := \frac{\langle J\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}\rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

Zeigen Sie: Wenn φ eine zweimal stetig differenzierbare, orientierungserhaltende ($\dot{\varphi} > 0$) Umparametrisierung ist, sodass $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, dann gilt $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi$. □

Aufgabe 3. Sei $k : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig gegeben. Sei $\alpha(\sigma) := \int_0^\sigma k(t)dt$. Zeigen Sie, dass die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : [0, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\int_0^t \cos(\alpha(\sigma))d\sigma, \int_0^t \sin(\alpha(\sigma))d\sigma \right) \end{aligned}$$

eine Kurve mit $\gamma(0) = (0, 0)$, $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$ und Krümmung $\kappa(t) = k(t)$ ist.
Beschreiben Sie, durch eine Formel und ein Bild, eine Kurve mit der Krümmungsfunktion $\kappa(s) = s$ (auf einem geeigneten Intervall).

Aufgabe 4. Sei $\gamma_{a,b}$, $0 < b < a$, eine Ellipse, gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (a\cos(t), b\sin(t)) \end{aligned}$$

Versuchen Sie so lange das Integral $l(\gamma) := \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|dt$ explizit zu berechnen, bis Sie überzeugt sind, dass Sie es nicht schaffen. Machen Sie sich dann klar, warum die folgende Aufgaben einen Ersatz bieten (und lösen Sie sie).

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$R(x) := \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{2j-1}{2j} \right)^2 \frac{x^{2i}}{2i-1} \right).$$

2. Sei $\varepsilon := \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Zeigen Sie dass im Konvergenzbereich von R gilt:

$$l(\gamma) = 2a\pi R(\varepsilon)$$