SoSe 2019

Prof. Dr. Thomas Vogel
Dr. Jonas Stelzig

Geometrie und Topologie von Flächen

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1. Zeichnen Sie das Bild der folgenden Kurven. Berechnen Sie ihre Länge, wobei sie ohne Beweis benutzen dürfen, dass reguläre Kurven $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ rektifizierbar sind und die Länge mit der Formel $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma(t)}\| dt$ berechnen können.

i)

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^2 - 1, t) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [0, 4\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t), t) \end{aligned}$$

Nachdem Sie Aufgabe *ii)* bearbeitet haben, lesen Sie den Abschnitt 'Beispiele für Helix-Formen in Natur und Technik' des Wikipedia-Artikels 'Helix'.

Aufgabe 2. Zeigen Sie dass die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t^2 \cos(\pi/t^2)) \end{aligned}$$

differenzierbar, aber nicht rektifizierbar ist. Warum ist das kein Widerspruch zu dem Satz aus der Vorlesung dass reguläre Kurven rektifizierbar sind?

Aufgabe 3. Sei $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert via $d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ für $x = (x_1, .., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

i) Die Funktion d_1 is eine Metrik.

ii) Der metrische Raum $(\mathbb{R}^n, d_1)$ ist vollständig.

Wie Sie in den Tutorien sehen werden, hat dieser metrische Raum die interessante Eigentschaft, dass Strecken rektifizierbar sind, aber es viele Wege zwischen zwei Punkten gibt, die dieselbe Länge haben.

Aufgabe 4. Sei $\gamma_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Folge von rektifizierbaren Wegen, die gleichmäßig gegen einen Weg $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ konvergiert. Es gelte $L(\gamma_i) \leq L$ für eine positive relle Zahl L. Zeigen Sie, dass dann auch γ rektifizierbar ist und $L(\gamma) \leq L$ gilt. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit den in den Tutorien besprochenen Beispielen.