

# Spatial Games

Vortrag im Rahmen der Vorlesung Spieltheorie von M.Schottenloher

Anne-Marie Rambichler, Christoph Wichmann

23. März 2009

- 1 Betrachtung von evolutorischen Spielen im Raum
  - Spatial Games
  - Allgemeine Definition der räumlichen evolutorischen Spiele
- 2 Betrachtung des räumlichen Gefangenendilemmas
  - Untersuchung des Basisspiels
  - Ausweitung des Basisspiels auf den Raum
  - Grundlegende Szenarien
- 3 Das Falke-Taube-Spiel als Spatial game
  - Betrachtung des räumlichen Falke-Taube-Spiels
  - Graphische Analyse des Falke-Taube Spiels
- 4 Variationen
- 5 Zusammenfassung

Bei den Spatial Games treffen zwei Theorien erstmals aufeinander:

- (evolutorische) *Spieltheorie*
- *zelluläre Automaten*

John von Neumann war maßgeblich an der Entwicklung beider Theorien beteiligt. Spatial Games bestechen durch ihre mathematischen Eigenschaften und die ihre Dynamik in der Simulation

- Strategiemenge  $\Sigma$
- Auszahlungsmatrix  $E = (E[i,j])_{i,j}$
- Zelle  $I$  im Gitter  $\Lambda$
- $N(I)$  die Menge aller zu  $I$  benachbarten Zellen

$$N^*(I) = N(I) \cup I.$$

### Dynamischer Prozess

Zelle  $I$  in Generation  $t$  erhält

$$s_t(I) = \sum_{J \in N(I)} (E[s_t(I), s_t(J)])$$

$$\hat{j} = \max_{J \in N^*(I)} \{s_t(J)\}$$

Dann setzt man  $s_{t+1}(I) = \hat{j}$ .

Jede Zelle  $I$ , die in Generation  $t$  die Strategie  $s_t(I)$  verfolgt, übernimmt in Generation  $t+1$  die in  $t$  erfolgreichste Strategie  $s_t(J)$  ihrer Nachbarn.

# Untersuchung des Basisspiels

- 2 Spieler  $M = \{1, 2\}$  (Individuen oder organisierte Gruppen)
- $S^1 = S^2 = \{D, C\}$  ist die Menge der reinen Strategien für beide Spieler
- Die Spieler entscheiden sich gleichzeitig für eine Strategie, unabhängig voneinander
- zugehörige, symmetrische Bimatrix:

	C	D
C	(1, 1)	(0, b)
D	(b, 0)	( $\varepsilon$ , $\varepsilon$ )

# Die Räumliche Erweiterung

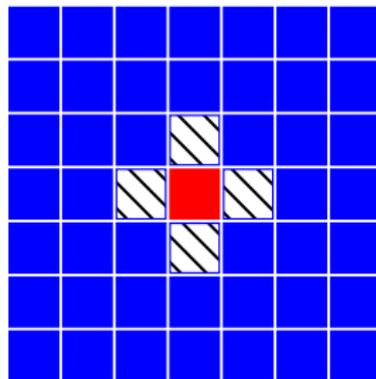
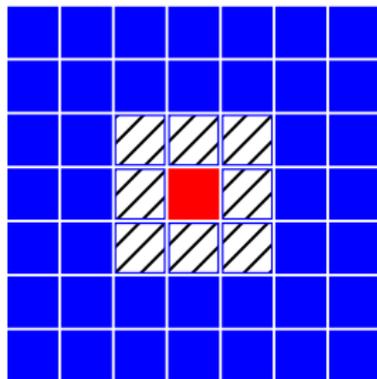


Abbildung: Moore-, von-Neumann-Umgebung

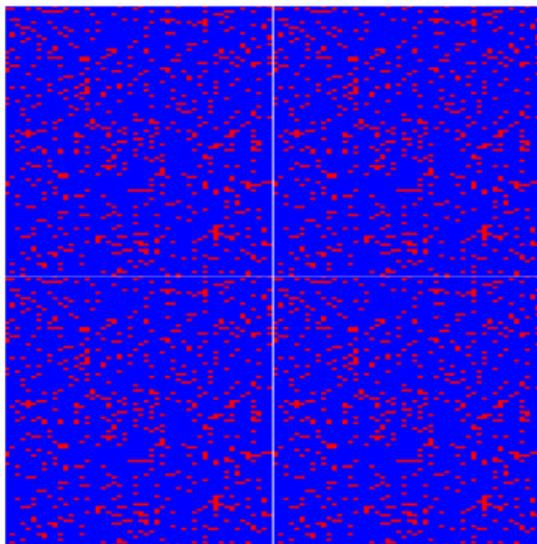
Auszahlungen für Moore-Umgebung:

$$u(C) = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

$$u(D) = \{0, b, 2b, \dots, 8b\}$$

# Simulation des räumlichen Gefangenendilemmas

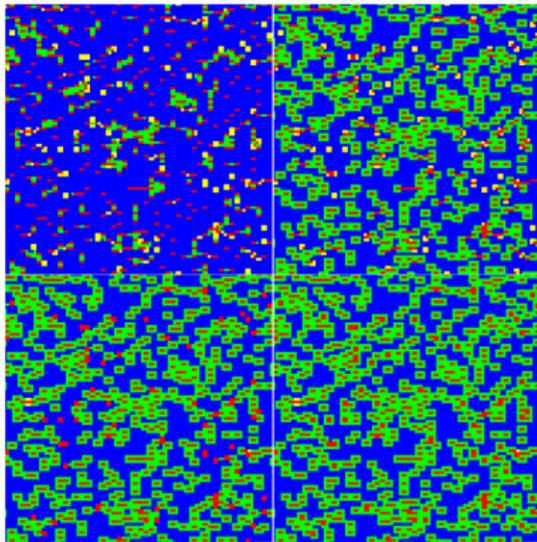
Zeitliche Entwicklung für die Parameterwerte  $b = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$



**Abbildung:** Es wird auf einer  $100 \times 100$ -Matrix gespielt. Die Anfangskonfiguration besteht aus einer zufälligen Anordnung mit 10% Defektoren und 90% Kooperatoren.

# Simulation des räumlichen Gefangenendilemmas

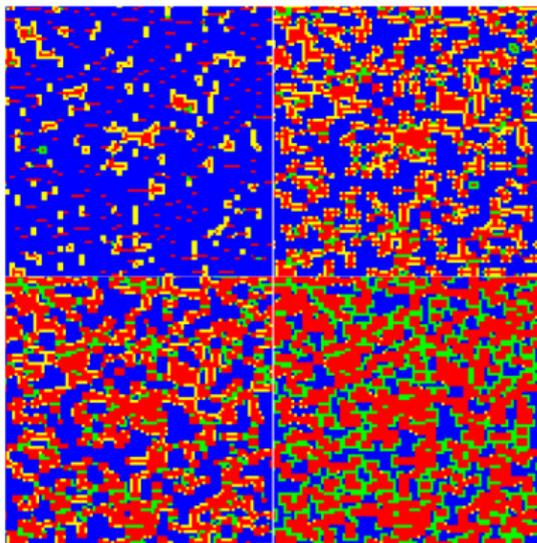
Zeitliche Entwicklung für die Parameterwerte  $b = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$



**Abbildung:** Es wird auf einer  $100 \times 100$ -Matrix gespielt. Die Anfangskonfiguration besteht aus einer zufälligen Anordnung mit 10% Defektoren und 90% Kooperatoren.

# Simulation des räumlichen Gefangenendilemmas

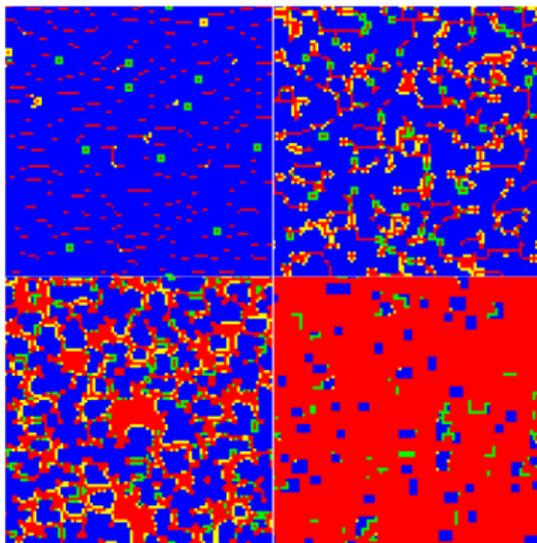
Zeitliche Entwicklung für die Parameterwerte  $b = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$



**Abbildung:** Es wird auf einer  $100 \times 100$ -Matrix gespielt. Die Anfangskonfiguration besteht aus einer zufälligen Anordnung mit 10% Defektoren und 90% Kooperatoren.

# Simulation des räumlichen Gefangenendilemmas

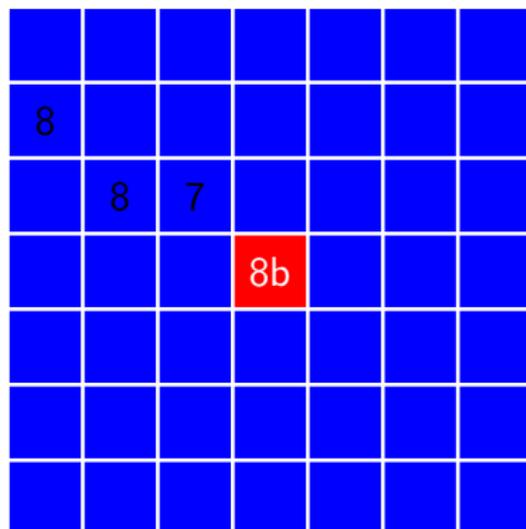
Zeitliche Entwicklung für die Parameterwerte  $b = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$



**Abbildung:** Es wird auf einer  $100 \times 100$ -Matrix gespielt. Die Anfangskonfiguration besteht aus einer zufälligen Anordnung mit 10% Defektoren und 90% Kooperatoren.

# Grundlegende Szenarien

Defektor dringt bei Kooperatoren ein



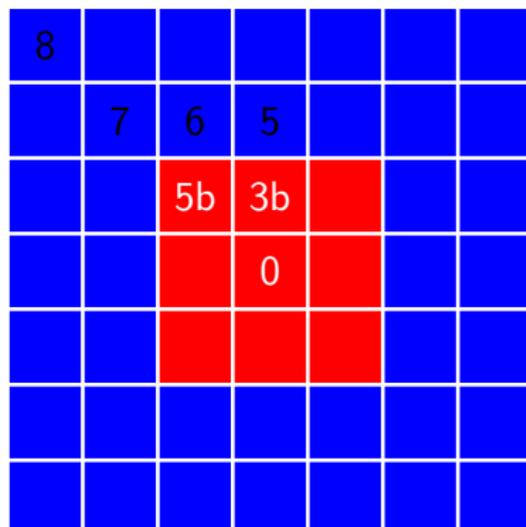
Auszahlungsmatrix

	C	D
C	(1, 1)	(0, b)
D	(b, 0)	( $\epsilon$ , $\epsilon$ )

Wegen  $b > 1$  übernehmen die Nachbarn die Strategie

# Grundlegende Szenarien

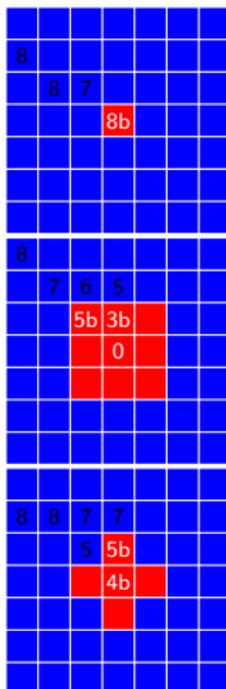
Defektor dringt bei Kooperatoren ein



- 1  $5b < 6$ , das System geht in Zustand 1 zurück
- 2  $6 < 5b < 7$ , das System geht in Zustand 3, und anschließend in Zustand 1
- 3  $7 < 5b < 8$ , das System verändert sich nicht mehr weiter
- 4  $8 < 5b$ , der Cluster breitet sich weiter aus (Perserteppich)

# Grundlegende Szenarien

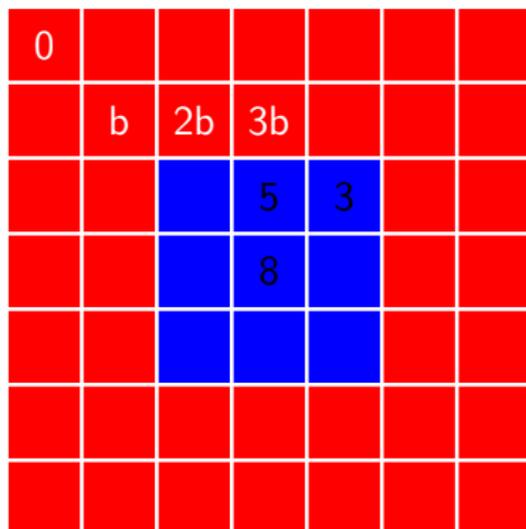
Defektor dringt bei Kooperatoren ein



- 1  $5b < 6$ , das System geht in Zustand 1 zurück
- 2  $6 < 5b < 7$ , das System geht in Zustand 3, und anschliessend in Zustand 1
- 3  $7 < 5b < 8$ , das System verändert sich nicht mehr weiter
- 4  $8 < 5b$ , der Cluster breitet sich weiter aus (Perserteppich)

# Grundlegende Szenarien

Kooperator dringt bei Defektoren ein

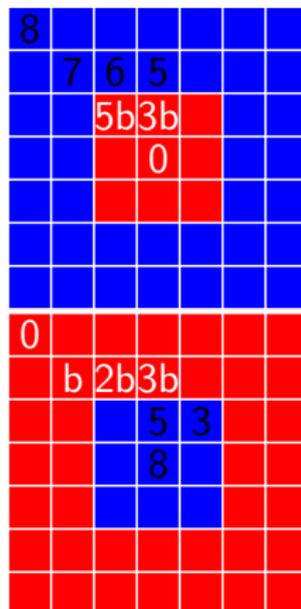


Ein einzelner Kooperator würde sofort verschwinden, deswegen wird ein  $3 \times 3$ -Cluster eingebracht

- 1  $2b < 3$ , der Cluster expandiert gleichmäßig als  $n \times n$  Cluster
- 2  $\frac{3}{2} < b < \frac{5}{3}$ , der Cluster expandiert ungleichmäßig
- 3  $5 < 3b < 8$ , das System verändert sich nicht mehr weiter
- 4  $8 < 3b$ , der Cluster verschwindet innerhalb von zwei Zügen

# Grundlegende Szenarien

## Vergleich der Invasionen

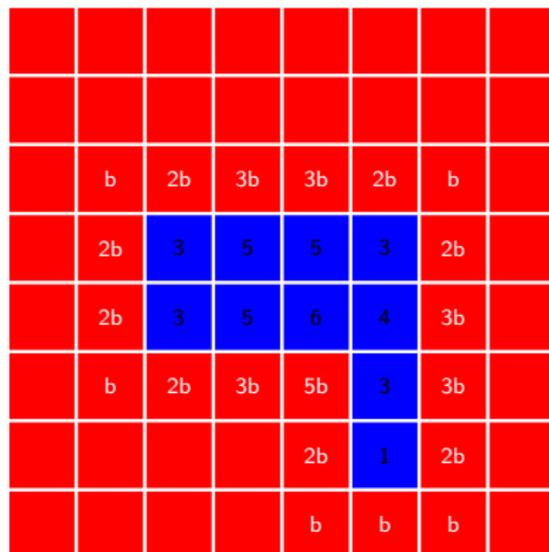


Es lassen sich drei Klassifizierungen bestimmen.

- 1  $b < \frac{8}{5}$ , nur Kooperatoren-Cluster können wachsen
- 2  $\frac{5}{3} < b$ , nur Defektoren-Cluster können wachsen
- 3  $\frac{8}{5} < b < \frac{5}{3}$ , Cluster beider Phänotypen können wachsen

# Grundlegende Szenarien

## Walker und der Big Bang of Cooperation



### Ein Walker

- spezieller Cluster bestehend aus 10 Kooperatoren
- fängt im Bereich  $\frac{3}{2} < b < \frac{5}{3}$  an zu "laufen"

# Grundlegende Szenarien

## Walker und der Big Bang of Cooperation

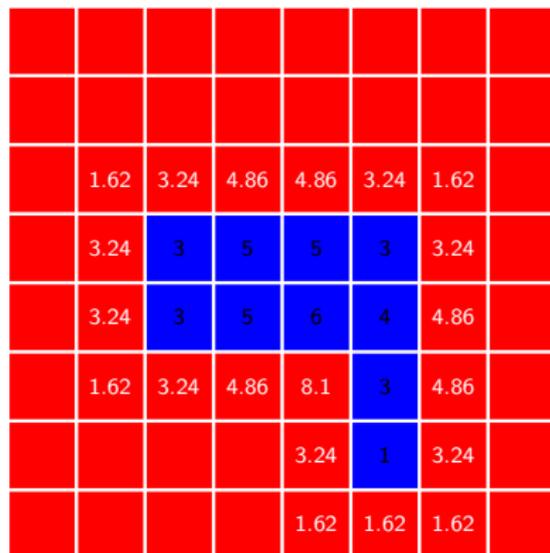


Abbildung: Walker mit  $b=1.62$

- spezieller Cluster bestehend aus 10 Kooperatoren
- fängt im Bereich  $\frac{3}{2} < b < \frac{5}{3}$  an zu "laufen"

# Grundlegende Szenarien

## Walker und der Big Bang of Cooperation

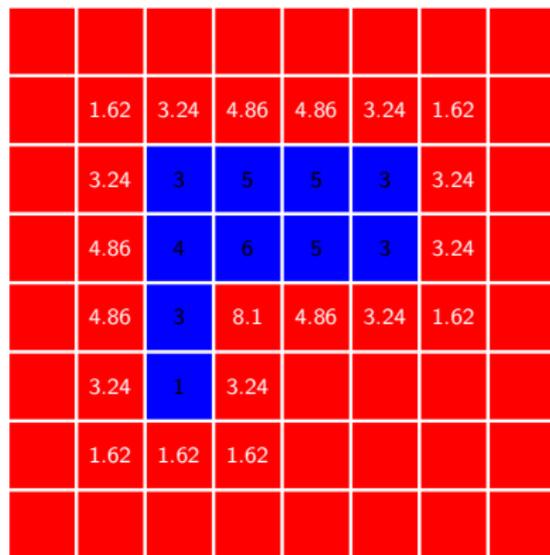


Abbildung: Walker mit  $b=1.62$

- spezieller Cluster bestehend aus 10 Kooperatoren
- fängt im Bereich  $\frac{3}{2} < b < \frac{5}{3}$  an zu "laufen"

# Grundlegende Szenarien

## Walker und der Big Bang of Cooperation

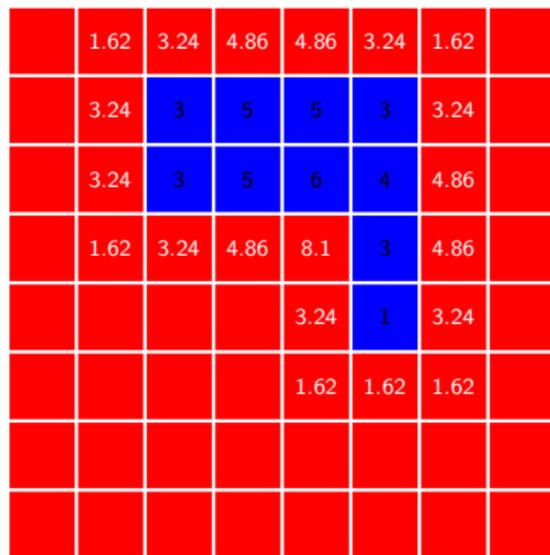


Abbildung: Walker mit  $b=1.62$

- spezieller Cluster bestehend aus 10 Kooperatoren
- fängt im Bereich  $\frac{3}{2} < b < \frac{5}{3}$  an zu "laufen"

# Das Falke-Taube-Spiel als Spatial game

## Untersuchung des Basisspiels

Ein Individuum in diesem Spiel kennt 3 Verhaltensmuster:

- Auftreten (display)
- Eskalieren/Angreifen (escalate)
- Rückzug (retreat)

	H	D
H	$(1-\beta)$	2
D	0	1

- Maxime des Falkens (H): Kämpfen, bis er selbst verletzt ist oder sich der Gegner zurückzieht.
- Maxime der Taube (D): Auftreten, sofort Zurückziehen, wenn der Gegner zum Angriff übergeht.

## Räumlichen Ausweitung des Falke-Taube-Spiels

- $\Sigma$  Strategiemenge
- $\Lambda$  quadratisches, ebenes  $n \times n$ -Gitter
- $N(i)$  Moore-Nachbarschaft
- $h$  Anteil der Falken an der Gesamtpopulation
- gemischte Strategien sind nicht zulässig
- periodische Randbedingungen

# Ausweitung des Basisspiels auf den Raum

- Im Allgemeinen wird für  $\beta < 1$  jede anfängliche Konfiguration von Falken und Tauben nach einer endlichen Anzahl an Wiederholungen ausschließlich aus Falken bestehen. In diesem Fall sind die Ergebnisse des klassischen Spiels mit denen der räumlichen Version identisch.
- Ist  $\beta$  sehr groß, ist der Schaden, den sich aufeinander treffende Falken gegenseitig zufügen sehr groß. Somit wird jede anfängliche Menge an Falken und Tauben nach einer endlichen Anzahl an Runden des klassischen wie des räumlichen Spiels nur noch aus Tauben bestehen.

Jedoch gibt es  $\beta$ -Werte innerhalb dieser extremen Grenzen, für die substantielle Unterschiede zwischen dem klassischen Spiel und dessen räumlicher Version auftreten.

# Ausweitung des Basisspiels auf den Raum

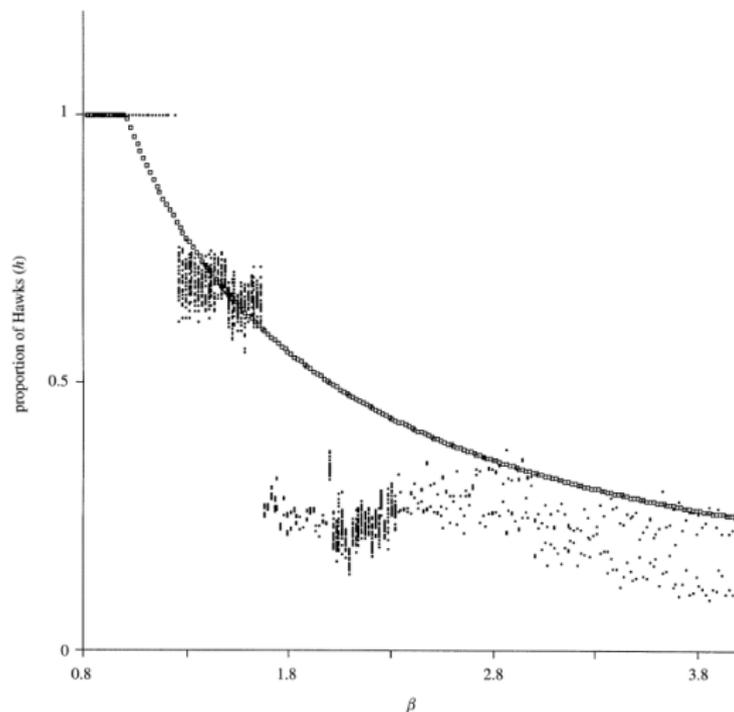


Abbildung: Variation des Falken-Anteils  $h$  als Funktion von  $\beta$ .

Nach der allgemeinen Definition der Spatial Games sind für eine konkrete Fragestellung zu wählen

- Das **Basisspiel** mit der zugehörigen, endlichen Menge an Strategien  $\Sigma$  und der Auszahlungsmatrix  $E$
- Das **Gitter**  $\Lambda$
- Die **Nachbarschaft**  $N^*(I)$  bzw.  $N(I)$  jeder Zelle  $I$  aus  $\Lambda$
- Die **Randbedingungen** für das Gitter  $\Lambda$
- Die **Updating**-Regeln
- Die Startkonfiguration

- Die räumliche Verallgemeinerung der evolutiven Spiele ist ein endlicher zellulärer Automat
- Die räumliche Struktur kann es einer Strategie ermöglichen, zu wachsen, auch wenn dies aus Sicht der klassischen evolutionären Spieltheorie nicht zu erwarten wäre
- Über einen weiten Bereich der relevanten Parameter können Strategien unendlich lang nebeneinander existieren
- Für den Vergleich mit der klassischen Spieltheorie ist die Betrachtung von größeren Systemen und deren statistische Auswertung von Bedeutung.

<http://lorax.fas.harvard.edu/virtuallabs/>

-  Nowak, M.A , May, R.M. 1992 Evolutionary Games and spatial Chaos. *Nature, Lond.* 379, 826-829
-  Nowak, M.A, Bonhoeffer, S, May, R.M. 1994 Spatial Games and the maintenance of cooperation. *Proc. natn. Acad. Sci.* **91**, 4877-4881.
-  Nowak, M.A. 2006 Evolutionary Dynamics: exploring the equations of life. *Harvard University Press*
-  Killingback, T. Doebli, M. 1996 Spatial evolutionary Game Theory: Hawks and Doves Revisited. *Proceeding: Biological Sciences* **263**, 1135-1144