Quantenspiele

Benedikt Fuchs   Matthias Lechner

17. Februar 2009

klassische Mechanik vs. Quantenmechanik

klassische Mechanik:

Zustand ist festgelegt durch Orts- und Impulskoordinaten

Quantenmechanik:

Zustand ist festgelegt durch einen abstrakten **Vektor** $\psi \in \mathcal{H}$ aus einem komplexen Hilbertraum mit $|\psi| = 1$

klassische Mechanik vs. Quantenmechanik

klassische Mechanik:

Zustand ist festgelegt durch Orts- und Impulskoordinaten

Quantenmechanik:

Zustand ist festgelegt durch einen abstrakten **Vektor** $\psi \in \mathcal{H}$ aus einem komplexen Hilbertraum mit $|\psi| = 1$

Messung

Um nun den Wert einer Observable (z.B. Orts- oder Impulskoordinaten) zu erfahren, muss man den Zustand **messen**.

Dazu: Zuordnung

$$O \stackrel{\wedge}{=} \hat{O}$$

O klassische Observable

$\hat{O}$ hermitescher Operator

Messung

Um nun den Wert einer Observable (z.B. Orts- oder Impulskoordinaten) zu erfahren, muss man den Zustand **messen**.
Dazu: Zuordnung

$$O \triangleq \hat{O}$$

O klassische Observable

$\hat{O}$ hermitescher Operator

Messung eines Eigenzustandes

klar: φ_i Eigenzustand (Eigenvektor) von $\hat{O}$ zum Eigenwert $c_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \hat{O}\varphi_i = c_i \cdot \varphi_i$$

Also: Observable O hat den Wert c_i

Problem:

Was ist bei $\psi = a\varphi_1 + b\varphi_2$??
$(a, b \in \mathbb{C}\ ,\ |a|^2 + |b|^2 = 1)$

Messung eines Eigenzustandes

klar: φ_i Eigenzustand (Eigenvektor) von $\hat{O}$ zum Eigenwert $c_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \hat{O}\varphi_i = c_i \cdot \varphi_i$$

Also: Observable O hat den Wert c_i

Problem:

Was ist bei $\psi = a\varphi_1 + b\varphi_2$??
$(a, b \in \mathbb{C}\ ,\ |a|^2 + |b|^2 = 1)$

Messung eines Eigenzustandes

klar: φ_i Eigenzustand (Eigenvektor) von $\hat{O}$ zum Eigenwert $c_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \hat{O}\varphi_i = c_i \cdot \varphi_i$$

Also: Observable O hat den Wert c_i

Problem:

Was ist bei $\psi = a\varphi_1 + b\varphi_2$??
$(a, b \in \mathbb{C}\ ,\ |a|^2 + |b|^2 = 1)$

Messung eines Eigenzustandes

klar: φ_i Eigenzustand (Eigenvektor) von $\hat{O}$ zum Eigenwert $c_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \hat{O}\varphi_i = c_i \cdot \varphi_i$$

Also: Observable O hat den Wert c_i

Problem:

Was ist bei $\psi = a\varphi_1 + b\varphi_2$??
$(a, b \in \mathbb{C}\ ,\ |a|^2 + |b|^2 = 1)$

Wie kann man dieses Problem lösen?

Dazu: *Übergangswahrscheinlichkeit* von ψ nach φ_i

$$p(\psi \to \varphi_i) = |\varphi_i^\dagger \cdot \psi|^2.$$

- Die Messung von O hat dann mit Wahrscheinlichkeit $p(\psi \to \varphi_i)$ das Ergebnis c_i.
- Die möglichen Ergebnisse sind die Eigenwerte c_i des Messoperators $\hat{O}$.
- Nach der Messung ist das System dann im Zustand φ_i

Wichtig:

- Quantenmechanische Messung ist probabilistisch!
- Die Messung zerstört den vorherigen Zustand!

Wie kann man dieses Problem lösen?

Dazu: *Übergangswahrscheinlichkeit* von ψ nach φ_i

$$p(\psi \to \varphi_i) = |\varphi_i^\dagger \cdot \psi|^2.$$

- Die Messung von O hat dann mit Wahrscheinlichkeit $p(\psi \to \varphi_i)$ das Ergebnis c_i.
- Die möglichen Ergebnisse sind die Eigenwerte c_i des Messoperators $\hat{O}$.
- Nach der Messung ist das System dann im Zustand φ_i

Wichtig:

- Quantenmechanische Messung ist probabilistisch!
- Die Messung zerstört den vorherigen Zustand!

Wie kann man dieses Problem lösen?

Dazu: *Übergangswahrscheinlichkeit* von ψ nach φ_i

$$p(\psi \to \varphi_i) = |\varphi_i^\dagger \cdot \psi|^2.$$

- Die Messung von O hat dann mit Wahrscheinlichkeit $p(\psi \to \varphi_i)$ das Ergebnis c_i.
- Die möglichen Ergebnisse sind die Eigenwerte c_i des Messoperators $\hat{O}$.
- Nach der Messung ist das System dann im Zustand φ_i

Wichtig:

- Quantenmechanische Messung ist probabilistisch!
- Die Messung zerstört den vorherigen Zustand!

Wie kann man dieses Problem lösen?

Dazu: *Übergangswahrscheinlichkeit* von ψ nach φ_i

$$p(\psi \to \varphi_i) = |\varphi_i^\dagger \cdot \psi|^2.$$

- Die Messung von O hat dann mit Wahrscheinlichkeit $p(\psi \to \varphi_i)$ das Ergebnis c_i.
- Die möglichen Ergebnisse sind die Eigenwerte c_i des Messoperators $\hat{O}$.
- Nach der Messung ist das System dann im Zustand φ_i

Wichtig:

- Quantenmechanische Messung ist probabilistisch!
- Die Messung zerstört den vorherigen Zustand!

Wie kann man dieses Problem lösen?

Dazu: *Übergangswahrscheinlichkeit* von ψ nach φ_i

$$p(\psi \to \varphi_i) = |\varphi_i^\dagger \cdot \psi|^2.$$

- Die Messung von O hat dann mit Wahrscheinlichkeit $p(\psi \to \varphi_i)$ das Ergebnis c_i.
- Die möglichen Ergebnisse sind die Eigenwerte c_i des Messoperators $\hat{O}$.
- Nach der Messung ist das System dann im Zustand φ_i

Wichtig:

- Quantenmechanische Messung ist probabilistisch!
- Die Messung zerstört den vorherigen Zustand!

Wie kann man dieses Problem lösen?

Dazu: *Übergangswahrscheinlichkeit* von ψ nach φ_i

$$p(\psi \to \varphi_i) = |\varphi_i^\dagger \cdot \psi|^2.$$

- Die Messung von O hat dann mit Wahrscheinlichkeit $p(\psi \to \varphi_i)$ das Ergebnis c_i.
- Die möglichen Ergebnisse sind die Eigenwerte c_i des Messoperators $\hat{O}$.
- Nach der Messung ist das System dann im Zustand φ_i

Wichtig:

- Quantenmechanische Messung ist probabilistisch!
- Die Messung zerstört den vorherigen Zustand!

Beispiel: Münze

- Observable: „Welche Seite liegt oben?“
- mögliche Messwerte: „Kopf“ oder „Zahl“

Beispiel (klassische Münze im QM-Formalismus)

Einer normalen („klassischen“) Münze kann man die Zustände

$$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eindeutig zuordnen.

Beispiel: Münze

- Observable: „Welche Seite liegt oben?“
- mögliche Messwerte: „Kopf“ oder „Zahl“

Beispiel (klassische Münze im QM-Formalismus)

Einer normalen („klassischen“) Münze kann man die Zustände

$$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eindeutig zuordnen.

Beispiel: Münze

- Observable: „Welche Seite liegt oben?“
- mögliche Messwerte: „Kopf“ oder „Zahl“

Beispiel (klassische Münze im QM-Formalismus)

Einer normalen („klassischen“) Münze kann man die Zustände

$$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eindeutig zuordnen.

Beispiel (Quantenmünze)

- eine Quantenmünze kann sich auch in einem *Überlagerungszustand* von k und z befinden.
- k und z sind nun *Eigenzustände* der Messung.
- Wir betrachten eine Quantenmünze im Zustand

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(k+z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Messung das Ergebnis „Kopf“ hat, ist:

$$p(b \to k) = \left|(1,0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Beispiel (Quantenmünze)

- eine Quantenmünze kann sich auch in einem *Überlagerungszustand* von k und z befinden.
- k und z sind nun *Eigenzustände* der Messung.
- Wir betrachten eine Quantenmünze im Zustand

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(k+z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Messung das Ergebnis „Kopf“ hat, ist:

$$p(b \to k) = \left|(1,0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Beispiel (Quantenmünze)

- eine Quantenmünze kann sich auch in einem *Überlagerungszustand* von k und z befinden.
- k und z sind nun *Eigenzustände* der Messung.
- Wir betrachten eine Quantenmünze im Zustand

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(k+z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Messung das Ergebnis „Kopf" hat, ist:

$$p(b \rightarrow k) = \left|(1,0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Beispiel (Quantenmünze)

- eine Quantenmünze kann sich auch in einem *Überlagerungszustand* von k und z befinden.
- k und z sind nun *Eigenzustände* der Messung.
- Wir betrachten eine Quantenmünze im Zustand

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(k+z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Messung das Ergebnis „Kopf" hat, ist:

$$p(b \to k) = \left|(1,0)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Zustände verändern

Zustände lassen sich über unitäre Matrizen verändern.

Beispiel

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wirkung auf k:

$$\mathbb{1}k = k, \quad Fk = z$$

Wahrscheinlichkeitsmatrix:

$$W = (1-p)\mathbb{1} + pF = \begin{pmatrix} (1-p) & p \\ p & (1-p) \end{pmatrix}$$

Verschränkung

Einstein: „Spukhafte Fernwirkung"

Betrachte ein System aus zwei Quantenmünzen

- Zustand des Systems $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- Möglicher Systemzustand: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes z) + (z \otimes k))$
- **nicht** darstellbar als $\psi_1 \otimes \psi_2$!
- Annahme: Messung der 1. Münze liefert „Kopf"
- Danach ist das System im Zustand $(k \otimes z)$
- $\Rightarrow$ Messung der 2. Münze wird **sicher** „Zahl" ergeben!

Verschränkung

Einstein: „Spukhafte Fernwirkung“
Betrachte ein System aus zwei Quantenmünzen

- Zustand des Systems $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- Möglicher Systemzustand: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes z) + (z \otimes k))$
- **nicht** darstellbar als $\psi_1 \otimes \psi_2$!
- Annahme: Messung der 1. Münze liefert „Kopf“
- Danach ist das System im Zustand $(k \otimes z)$
- $\Rightarrow$ Messung der 2. Münze wird **sicher** „Zahl“ ergeben!

Verschränkung

Einstein: „Spukhafte Fernwirkung“
Betrachte ein System aus zwei Quantenmünzen

- Zustand des Systems $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- Möglicher Systemzustand: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes z) + (z \otimes k))$
- **nicht** darstellbar als $\psi_1 \otimes \psi_2$!
- Annahme: Messung der 1. Münze liefert „Kopf“
- Danach ist das System im Zustand $(k \otimes z)$
- $\Rightarrow$ Messung der 2. Münze wird **sicher** „Zahl“ ergeben!

Verschränkung

Einstein: „Spukhafte Fernwirkung“
Betrachte ein System aus zwei Quantenmünzen

- Zustand des Systems $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- Möglicher Systemzustand: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes z) + (z \otimes k))$
- **nicht** darstellbar als $\psi_1 \otimes \psi_2$!
- Annahme: Messung der 1. Münze liefert „Kopf“
- Danach ist das System im Zustand $(k \otimes z)$
- $\Rightarrow$ Messung der 2. Münze wird **sicher** „Zahl“ ergeben!

Verschränkung

Einstein: „Spukhafte Fernwirkung"
Betrachte ein System aus zwei Quantenmünzen

- Zustand des Systems $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- Möglicher Systemzustand: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes z) + (z \otimes k))$
- **nicht** darstellbar als $\psi_1 \otimes \psi_2$!
- Annahme: Messung der 1. Münze liefert „Kopf"
- Danach ist das System im Zustand $(k \otimes z)$
- $\Rightarrow$ Messung der 2. Münze wird **sicher** „Zahl" ergeben!

Verschränkung

Einstein: „Spukhafte Fernwirkung“
Betrachte ein System aus zwei Quantenmünzen

- Zustand des Systems $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- Möglicher Systemzustand: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes z) + (z \otimes k))$
- **nicht** darstellbar als $\psi_1 \otimes \psi_2$!
- Annahme: Messung der 1. Münze liefert „Kopf“
- Danach ist das System im Zustand $(k \otimes z)$
- $\Rightarrow$ Messung der 2. Münze wird **sicher** „Zahl“ ergeben!

Verschränkung

Einstein: „Spukhafte Fernwirkung"
Betrachte ein System aus zwei Quantenmünzen

- Zustand des Systems $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- Möglicher Systemzustand: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes z) + (z \otimes k))$
- **nicht** darstellbar als $\psi_1 \otimes \psi_2$!
- Annahme: Messung der 1. Münze liefert „Kopf"
- Danach ist das System im Zustand $(k \otimes z)$
- $\Rightarrow$ Messung der 2. Münze wird **sicher** „Zahl" ergeben!

Verschränkung

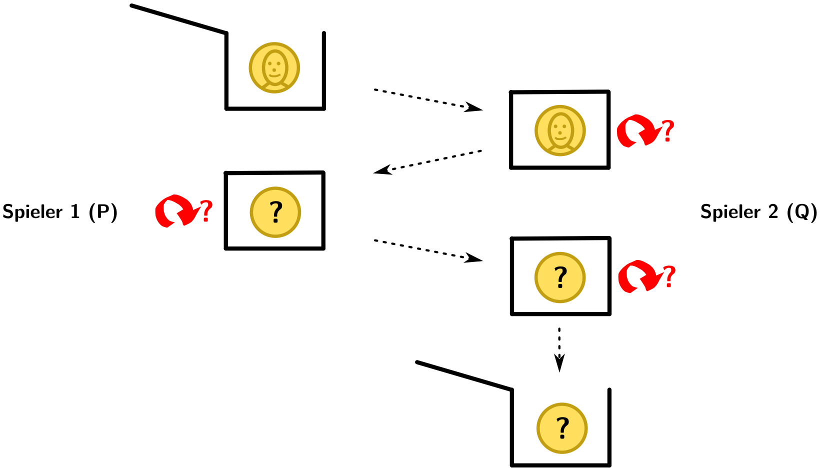
Einstein: „Spukhafte Fernwirkung"
Betrachte ein System aus zwei Quantenmünzen

- Zustand des Systems $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
- Möglicher Systemzustand: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes z) + (z \otimes k))$
- **nicht** darstellbar als $\psi_1 \otimes \psi_2$!
- Annahme: Messung der 1. Münze liefert „Kopf"
- Danach ist das System im Zustand $(k \otimes z)$
- $\Rightarrow$ Messung der 2. Münze wird **sicher** „Zahl" ergeben!

Zwei Quantenspiele

Ein Spiel mit einer Quantenmünze

David Meyer entwirft folgendes Spiel zwischen „Captain Picard“ (P) und „Q“(Q):



Auszahlung und Nash-Gleichgewicht

Bimatrix der Normalform des klassischen Spiels:

	NN	NF	FN	FF
N	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
F	(1,-1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)

Nash-Gleichgewicht

Es gibt nur ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

50% „Umdrehen“, 50% „Liegenlassen“
(für beide Spieler)

Auszahlung und Nash-Gleichgewicht

Bimatrix der Normalform des klassischen Spiels:

	NN	NF	FN	FF
N	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
F	(1,-1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)

Nash-Gleichgewicht

Es gibt nur ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien:

50% „Umdrehen“, 50% „Liegenlassen“

(für beide Spieler)

Vektordarstellung - klassisch

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Spieler 1} & & \text{Spieler 2} \\
\hline
k & \longrightarrow & W_2\, k \\
 & \swarrow & \\
W_1 W_2\, k & \longrightarrow & W_2 W_1 W_2\, k \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\boxed{k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad W_j = \begin{pmatrix} 1 - p_j & p_j \\ p_j & 1 - p_j \end{pmatrix}}
$$

Vektordarstellung - quantenmechanisch

Spieler 1		Spieler 2
k	$\longrightarrow$	$U_2\, k$
	$\swarrow$	
$U_1 U_2\, k$	$\longrightarrow$	$U_2 U_1 U_2\, k$

$$\boxed{k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j^* & a_j^* \end{pmatrix}}$$

Unfaires Quanten-Münzspiel

Annahme

Spieler 1 darf keine Quantenstrategien spielen!

Frage

Kann Spieler 2 daraus einen Vorteil ziehen?

Antwort

Ja! Und zwar mit der Hadamard-Matrix

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Unfaires Quanten-Münzspiel

Spieler 1		Spieler 2
k	$\longrightarrow$	$H_2\,k = b$
	$\swarrow$	
$W_1\,b = b$	$\longrightarrow$	$H_2\,b = k$

$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$W = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$	$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Warum gewinnt immer Spieler 2?

b ist Eigenvektor von W_2!

Wieder faires Quanten-Münzspiel

Spieler 1		Spieler 2
k	$\longrightarrow$	$H_2\, k = b$
	$\swarrow$	
$H_1\, b = k$	$\longrightarrow$	$H_2\, k = b$

$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$W = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$	$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis

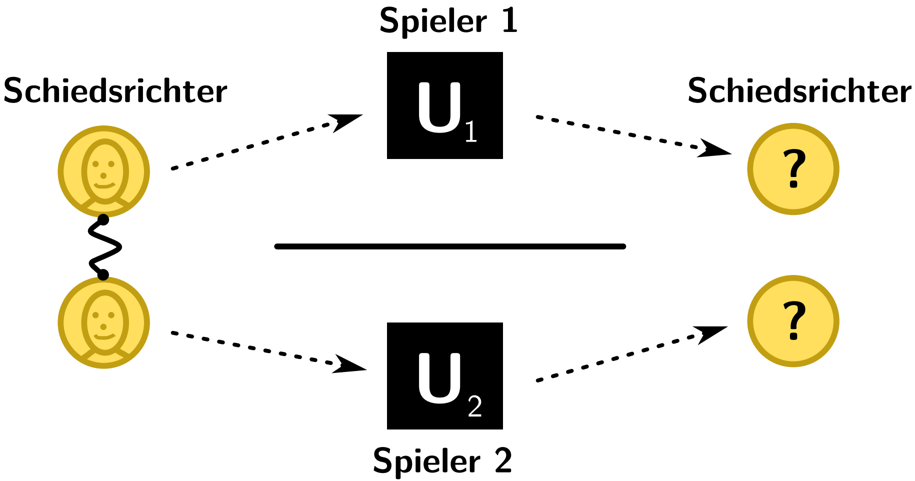
Beide Spieler haben nun wieder gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit!

Fazit

- (optimale) Quantenstrategien sind mindestens so gut wie klassische
- Es gibt in reinen Quantenstrategien nicht unbedingt ein Nash-Gleichgewicht
- Es gibt in gemischten Quantenstrategien immer ein Nash-Gleichgewicht

Das Quanten-Gefangenendilemma (*Eisert et al.*)

Die Spieler benutzen Quantenmünzen, um ihre Entscheidung mitzuteilen:



Spielablauf

Endzustand

Unmittelbar vor der Messung sind die beiden Münzen im Zustand

$$f := J^\dagger (U_1 \otimes U_2) J\,(k \otimes k)$$

Erlaubte Strategien

$$U_j(\theta_j, \varphi_j) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_j}\cos(\theta_j/2) & \sin(\theta_j/2) \\ -\sin(\theta_j/2) & e^{-i\varphi_j}\cos(\theta_j/2) \end{pmatrix}$$

mit $0 \le \theta_j \le \pi$ und $0 \le \varphi_j \le \frac{\pi}{2}$.
Zum Beispiel:

$$U(0,0) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U(\pi,0) = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spielablauf

Endzustand

Unmittelbar vor der Messung sind die beiden Münzen im Zustand

$$f := J^\dagger (U_1 \otimes U_2) J\,(k \otimes k)$$

Erlaubte Strategien

$$U_j(\theta_j, \varphi_j) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_j}\cos(\theta_j/2) & \sin(\theta_j/2) \\ -\sin(\theta_j/2) & e^{-i\varphi_j}\cos(\theta_j/2) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq \theta_j \leq \pi$ und $0 \leq \varphi_j \leq \frac{\pi}{2}$.

Zum Beispiel:

$$U(0,0) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U(\pi,0) = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spielablauf

Endzustand

Unmittelbar vor der Messung sind die beiden Münzen im Zustand

$$f := J^\dagger(U_1 \otimes U_2)J\,(k \otimes k)$$

Erlaubte Strategien

$$U_j(\theta_j, \varphi_j) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_j}\cos(\theta_j/2) & \sin(\theta_j/2) \\ -\sin(\theta_j/2) & e^{-i\varphi_j}\cos(\theta_j/2) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq \theta_j \leq \pi$ und $0 \leq \varphi_j \leq \frac{\pi}{2}$.
Zum Beispiel:

$$U(0,0) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U(\pi,0) = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spielablauf

Bimatrix des GD

	Kooperieren	Defektieren
Kooperieren	(3,3)	(0,5)
Defektieren	(5,0)	(1,1)

Auszahlung

Zur Erinnerung: $f := J^\dagger (U_1 \otimes U_2) J (k \otimes k)$

$$\boxed{p_{xy} = \left|(x^\dagger \otimes y^\dagger) \cdot f\right|^2} \implies \begin{aligned} u_1 &= 3p_{kk} + 1p_{zz} + 0p_{kz} + 5p_{zk} \\ u_2 &= 3p_{kk} + 1p_{zz} + 5p_{kz} + 0p_{zk} \end{aligned}$$

Spielablauf

Bimatrix des GD

	Kooperieren	Defektieren
Kooperieren	(3,3)	(0,5)
Defektieren	(5,0)	(1,1)

Auszahlung

Zur Erinnerung: $f := J^\dagger (U_1 \otimes U_2) J\,(k \otimes k)$

$$\boxed{p_{xy} = |(x^\dagger \otimes y^\dagger) \cdot f|^2} \implies \begin{array}{l} u_1 = 3p_{kk} + 1p_{zz} + 0p_{kz} + 5p_{zk} \\ u_2 = 3p_{kk} + 1p_{zz} + 5p_{kz} + 0p_{zk} \end{array}$$

Spielablauf

Bimatrix des GD

	Kooperieren	Defektieren
Kooperieren	(3,3)	(0,5)
Defektieren	(5,0)	(1,1)

Auszahlung

Zur Erinnerung: $f := J^\dagger (U_1 \otimes U_2) J \, (k \otimes k)$

$$\boxed{p_{xy} = |(x^\dagger \otimes y^\dagger) \cdot f|^2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} u_1 &= 3p_{kk} + 1p_{zz} + 0p_{kz} + 5p_{zk} \\ u_2 &= 3p_{kk} + 1p_{zz} + 5p_{kz} + 0p_{zk} \end{aligned}$$

Unverschränktes Spiel

- Anfangszustand „Kopf“: $((k \otimes k))$
- Wahrscheinlichkeit für „Beide Kooperieren“ ist

$$p_{kk} = |\cos(\theta_1/2)\cos(\theta_2/2)|^2,$$

  also faktorisiert und unabhängig von $\varphi_{1,2}$.
- **Wie klassisches Gefangenendilemma!**

Verschränktes Spiel

- Anfangszustand: $\frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes k) + i(z \otimes z))$
- Wahrscheinlichkeit für „Beide Kooperieren“ ist

$$p_{kk} = |\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\cos(\theta_1/2)\cos(\theta_2/2)|^2,$$

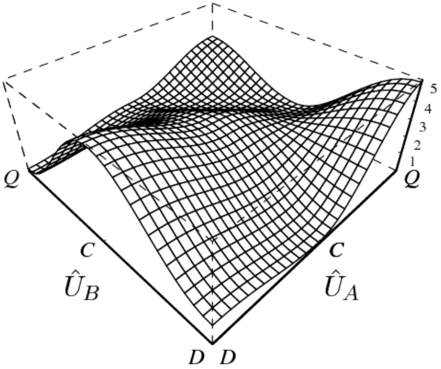
faktorisiert also nicht!

- **Neue Strategien möglich!**

Neue Strategien

$$Q = U(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

dominiert das bisherige Nash-Gleichgewicht D!



Neues Nash-Gleichgewicht?

Ist (Q, Q) neues Nash-Gleichgewicht?

Finde beste Antwort von Spieler 1, wenn Spieler 2 Q spielt!

$$\boxed{u_1(\theta_1, \varphi_1, 0, \tfrac{\pi}{2}) = \cos^2(\theta_1/2)(2\sin^2(\varphi_1) + 1)}$$

- $u_1(\theta_1, \varphi_1, 0, \frac{\pi}{2})$ maximal, wenn auch Spieler 1 Q spielt!
  $\Longrightarrow \quad (Q, Q)$ neues Nash-Gleichgewicht!
- Beachte: $u_1(Q, Q) = u_2(Q, Q) = 3$
  $\Longrightarrow \quad$ „Gefangenendilemma ist kein Dilemma mehr!“

Neues Nash-Gleichgewicht?

Ist (Q, Q) neues Nash-Gleichgewicht?

Finde beste Antwort von Spieler 1, wenn Spieler 2 Q spielt!

$$\boxed{u_1(\theta_1, \varphi_1, 0, \tfrac{\pi}{2}) = \cos^2(\theta_1/2)(2\sin^2(\varphi_1) + 1)}$$

- $u_1(\theta_1, \varphi_1, 0, \frac{\pi}{2})$ maximal, wenn auch Spieler 1 Q spielt!
  $\Longrightarrow \quad (Q, Q)$ neues Nash-Gleichgewicht!
- Beachte: $u_1(Q, Q) = u_2(Q, Q) = 3$
  $\Longrightarrow \quad$ „Gefangenendilemma ist kein Dilemma mehr!“

Neues Nash-Gleichgewicht?

Ist (Q, Q) neues Nash-Gleichgewicht?

Finde beste Antwort von Spieler 1, wenn Spieler 2 Q spielt!

$$\boxed{u_1(\theta_1, \varphi_1, 0, \tfrac{\pi}{2}) = \cos^2(\theta_1/2)(2\sin^2(\varphi_1) + 1)}$$

- $u_1(\theta_1, \varphi_1, 0, \frac{\pi}{2})$ maximal, wenn auch Spieler 1 Q spielt!
  $\Longrightarrow \quad (Q, Q)$ neues Nash-Gleichgewicht!
- Beachte: $u_1(Q, Q) = u_2(Q, Q) = 3$
  $\Longrightarrow \quad$ „Gefangenendilemma ist kein Dilemma mehr!“

Fazit

- Quantenspiele sind (evtl. klassische) Spiele mit Quantenzuständen
- Quantenspiele ermöglichen gegenüber klassischen neue Strategien
- Die beste Quantenstrategie ist mindestens so gut wie die beste klassische (Fairness!)
- Quantenstrategien können neue Nash-Gleichgewichte erzeugen

Ausblick

Quantenspiele sind von Bedeutung bei:

- Quantenkommunikation
- Spiele in atomaren und molekularen Dimensionen