Einfaches Beispiel:

Der Arbeiter kann wählen zwischen:

"Schuften" (= S) $\Rightarrow$ Kosten von e für den Arbeiter

"Faulenzen" (= F) $\Rightarrow$Gewinn von y für den Unternehmer

Der Unternehmer kann wählen zwischen:

"Kontrollieren" (= K) $\Rightarrow$ Kosten von h für den Unternehmer, dafür weiß er ob sich der Arbeiter angestrengt hat oder nicht.

"Nicht kontrollieren" (= NK)

Der Unternehmer bezahlt dem Arbeiter einen Lohn w, es sei denn er ertappt ihn beim Faulenzen. In diesem Fall erhält der Arbeiter Null. Beide Spieler wählen ihre Aktion gleichzeitig.

Wir nehmen an, dass
y (Gewinn) $>$ w (=Lohn) $>$ e (=Anstrengung) $>$ h (=Kontrollkosten)

Normalform des Spiels:

		Chef	
		K	NK
Arbeiter	F	0 , -h	w , 0
	S	w-e , y-h	w-e , y

Dieses Spiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht an der Stell (F , NK).

Optimale Risikoteilung in einem Principal-Agent-Modell

Stufe 1:

Manager ("Principal") bietet Vertrag an (oder nicht).

Stufe 2:

Arbeiter ("Agent") willigt ein oder nicht. Willigt er nicht ein, hat er dennoch eine OUTSIDE OPTION mit PAYOFF = a. Es könnte sich beispielsweise um Arbeitslosenhilfe handeln.

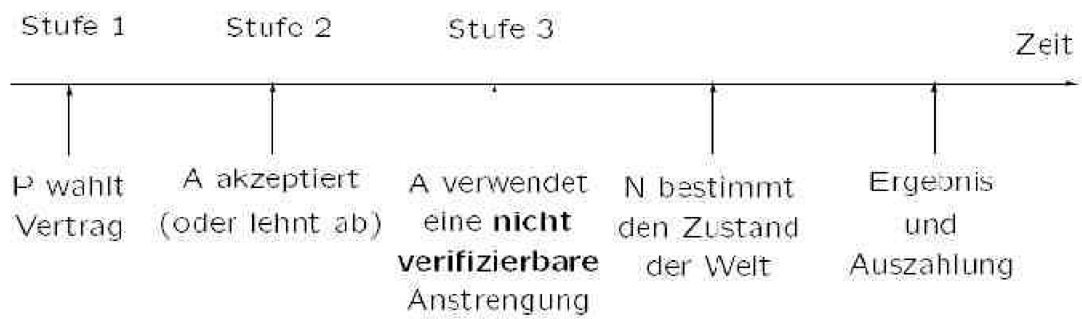
Stufe 3:

Arbeiter arbeitet mit Kosten e = 1 wenn er sich außerordentlich bemüht (Arbeitsaufwand), sonst mit Kosten e = 0.

Stufe 4:

Output y_l oder y_h realisiert sich ($y_l < y_h$) und Vertrag wird erfüllt ($l = low, h = high$).

Moral Hazard mit verborgener Aktion



Zusammenhang zw. Anstrengung und Output

Bei e = 0 realisiert sich y_l.

Bei e = 1 realisiert sich:

- y_h mit Wahrscheinlichkeit p,
- y_l mit Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$.

Es sei $0 < p \leq 1$.

Erwartete Payoffs (Π):

Manager (Principal) ist risikoneutral:
$\Pi_M = E(y - w)$
Arbeiter (Agent) ist risikoavers im Lohn w mit Risikonutzenfunktion $u(w)$:
(Beachte: bei averser Fkt. gilt $u' > 0$ und $u'' \leq 0$)
$\Pi_A = E[u(w)] - e$

Teil 1: Optimale Risikoteilung bei perfekter Kontrahierbarkeit

Annahmen für Teil 1:

Sowohl e als auch y sind in einem Arbeitsvertrag festgesetzt (kontrahiert).
Der Arbeiter zahlt bei $e = 0$ (Faulenzen) eine riesige Strafe, deshalb wird er auf jeden Fall $e = 1$ (Anstrengen) wählen.

Bei $e = 1$ bekommt er:

- w_h, wenn sich y_h realisiert,
- w_l, wenn sich y_l realisiert.

Aufgabenstellung:

Finde die perfekte Lohnkonstellation aus Sicht des Managers (Principal).

Lösung des Spiels

Stufe 3:

Arbeiter wählt $e = 1$, da sonst Strafe.

Stufe 2:

Arbeiter akzeptiert Vertrag, wenn
$\Pi_A = pu(w_h) + (1-p)u(w_l) - 1 \geq a$ (PC)

"Participation Constraint"

(auch: "Individual Rationality Constraint")

Stufe 1:

Manager löst das Problem: $\max_{w_l, w_h} \Pi_M = p(y_h - w_h) + (1-p)(y_l - w_l)$ unter der Nebenbedingung (PC).

Bestimmung von w_l und w_h

Um w_l und $w_h$zu finden, bestimmen wir die Extremwerte der beiden Payoff-Funktionen Π_A, Π_M.

Für den Arbeiter:
$d\Pi_A = 0 \Rightarrow pu'(w_h)dw_h + (1-p)u'(w_l)dw_l = 0$

Für den Manager:
$d\Pi_M = 0 \Rightarrow -pdw_h - (1-p)dw_l = 0$

Nach Auflösen beider Gleichungen nach dem Bruch $\frac{dw_h}{dw_l}$ kann man sie gleichsetzen und man erhält:

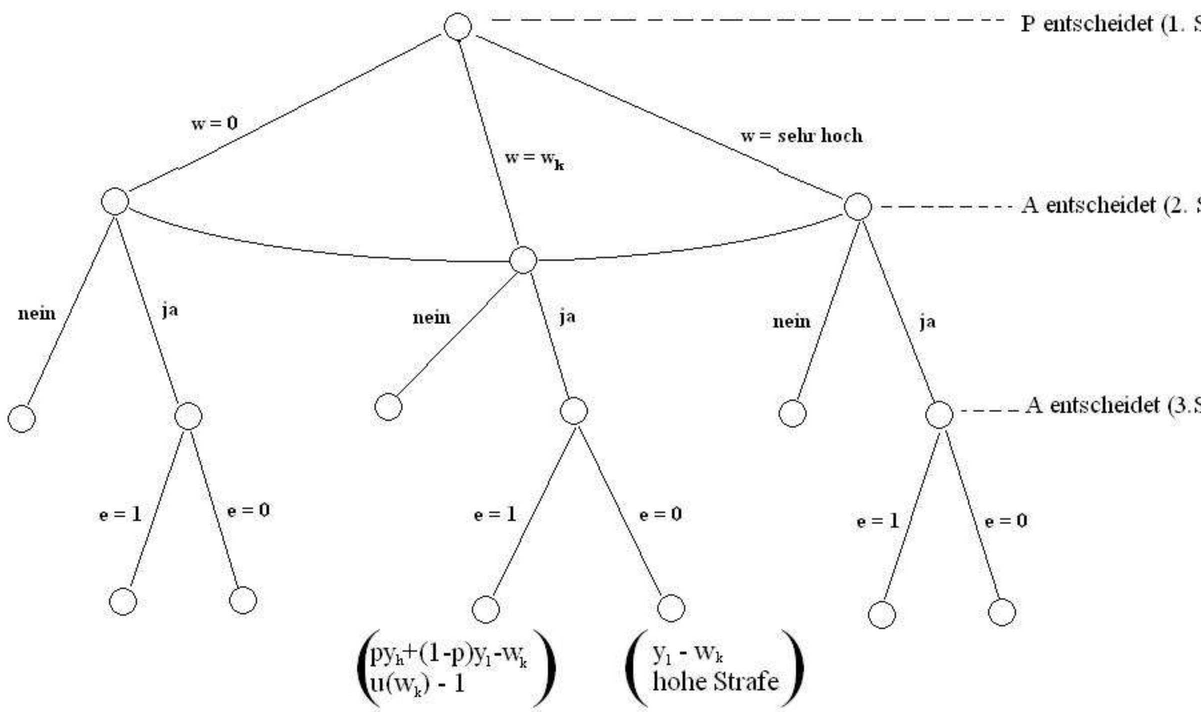
$\Rightarrow \frac{(1-p)u'(w_l)}{pu'(w_h)} = \frac{1-p}{p} \Rightarrow u'(w_h) = u'(w_l)$ ("Optimalitätsbedingung")

Wäre die Nutzenfunktion des Arbeiters risikoneutral, also z.B. $u(x) = x$, so wäre diese Optimalitätsbedingung immer erfüllt.

Bei einer risikoaversen Nutzenfunktion, z.B. $u(x) = \sqrt{x}$, folgt aus der Optimalitätsbedingung:
$w_h = w_l =: w_k$

Weil der Manager natürlich den niedrigsten Lohn zahlen will, bei dem der Arbeiter gerade noch den Arbeitsvertrag akzeptiert, zahlt er also genau das w_k, bei dem $u(w_k) = a + 1$. Dies folgt aus (PC).

Der erwartete Payoff des Managers ist somit:
$\Pi_M = py_h + (1-p)y_l - w_k$


P entscheidet (1. S
w = 0
w = w_k
w = sehr hoch
A entscheidet (2. S
nein
ja
nein
ja
nein
ja
A entscheidet (3.S
e = 1
e = 0
e = 1
e = 0
e = 1
e = 0
$\begin{pmatrix} py_h+(1-p)y_l-w_k \\ u(w_k) - 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} y_l - w_k \\ \text{hohe Strafe} \end{pmatrix}$

Fragen zu Teil 1:

Weshalb ist dieses Ergebnis plausibel?

Welche Rolle spielt die "riesige Strafe" bei Faulheit bei diesem Spiel?

Ein Beispiel zu Teil 1:

Es sei die Nutzenfunktion des Arbeiters $u(w) = \sqrt{w}$. (risikoavers)
Die "Outside Option" (z.B. Arbeitslosenunterstützung) sei $a = 1$.
Als bestmögliche Lohnkonstellation für den Arbeiter ergibt sich aus Sicht des Managers also ein konstanter Lohn, der die Gleichung $u(w_k) = a + 1 = 2$ erfüllt.

$\Rightarrow \sqrt{w_k} = 2 \Rightarrow w_k = 4$

Es sei die Nutzenfunktion des Arbeiters $u(w) = w$. (risikoneutral)

$\Rightarrow w_k = 2$

Teil 2: Optimale Risikoteilung bei nicht perfekter Kontrahierbarkeit

Annahme für Teil 2:

Die "riesige Strafe" fällt weg. Dafür versucht der Manager durch einen Anreizvertrag den Arbeiter vom Faulenzen abzuhalten.

Möglicher Anreizvertrag:

Der Arbeiter bekommt:

- w_h, wenn sich $y_h$realisiert,
- w_l, wenn sich y_l realisiert.

(Also bekommt er bei $e = 0$ ganz sicher w_l, bei $e = 1$ mit Wahrscheinlichkeit p den Lohn w_h und trotzdem mit Wahrscheinlichkeit (1-p) nur w_l)

Aufgabenstellung

Finde wieder die optimale Lohnstruktur aus Sicht des Managers.

Lösung des Spiels:

Stufe 3:

Der Arbeiter wählt nur dann $e = 1$, wenn:

$$\Pi_A(e = 1) \geq \Pi_A(e = 0)$$
$$pu(w_h) + (1 - p)u(w_l) - 1 \geq u(w_l)$$
$$\Rightarrow p[u(w_h) - u(w_l)] \geq 1 \text{ (IC)}$$

"Incentive Constraint"

Stufe 2:

Der Arbeiter akzeptiert den Vertrag, wenn (wie vorher) der Particpation Constraint (PC) gilt:

$$\Pi_A(e = 1) = pu(w_h) + (1 - p)u(w_l) - 1 \geq a$$

Stufe 1:

Der Manager sucht nun die Lohnkonstellation, die seine Nutzenfunktion maximiert:

$$max_{w_l,w_h} \Pi_M = p(y_h - w_h) + (1 - p)(y_l - w_l)$$

unter den Nebenbedingungen (IC) und (PC).

Um dieses Maximum zu erreichen, müssen die Nebenbedingungen mit Gleichheit gelten. Damit folgt sofort:

- $u(w_l) = a$ (Der Nutzen des geringsten Lohnes muss mindestens so groß wie der Nutzen der Arbeitslosenhilfe sein)
- $u(w_h) = \frac{1+pa}{p} = a + \frac{1}{p}$

Damit kann man w_l und w_h einfach berechnen.

Da u(x) eine streng monoton steigende Funktion ist, gilt auf jeden Fall $w_h > w_l$, was mit der rationalen Vorstellung zusammenpasst.

Ein Beispiel zu Teil 2:

Die Outside Option (Arbeitslosenhilfe) sei wieder $a = 1$.

Sei die Nutzenfunktion des Arbeiters $u(x) = \sqrt{x}$ (risikoavers). Es gilt:

- $u(w_l) = 1 \Rightarrow w_l = 1$
- $u(w_h) = 1 + \frac{1}{p} \Rightarrow w_h = 1 + \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}$

Ist die Nutzenfunktion des Arbeiters $u(x) = x$ (riskoneutral), so folgt:

- $w_l = 1$
- $w_h = 1 + \frac{1}{p}$

Man erkennt: Ist der Arbeiter risikoavers, muss man ihn mit einem höheren Anreiz locken, als wenn er risikoneutral ist.

Vergleich von Teil 1 (System mit Strafe) und Teil 2 (System mit Anreiz):

In Teil 1 galt für die Nutzenfunktion des Managers:

$$\Pi_{M_1} = py_h + (1-p)y_l - w_k$$

In Teil 2 galt für die Nutzenfunktion des Managers:

$$\Pi_{M_2} = py_h + (1-p)y_l - pw_h - (1-p)w_l$$

Die Differenz der beiden Nutzenfunktionen (="Agency-Kosten") beträgt:

$$D = \Pi_{M_1} - \Pi_{M_2} = pw_h + (1-p)w_l - w_k$$

wobei sich w_h, w_l, w_k bei Kenntnis von $u(x)$ aus den Gleichungen

$$u(w_h) = a + \frac{1}{p}$$
$$u(w_l) = a$$
$$u(w_k) = a + 1$$

ergeben.

Vergleich der Systeme bei zwei Beispielen:

a) Sei $u(x) = x$ (risikoneutral). Dann ergeben sich:

$$w_h = a + \frac{1}{p}$$
$$w_l = a$$
$$w_k = a + 1$$

$\Rightarrow D = pw_h + (1-p)w_l - w_k = p(a + \frac{1}{p}) + (1-p)a - a - 1 = pa + 1 + a - pa - a - 1 = 0$

Bei Risikoneutralität des Arbeiters ist es also egal, welches System der Manager benutzt.

b) Sei $u(x) = \sqrt{x}$ (risikoavers). Dann ergeben sich:

$$w_h = (a + \frac{1}{p})^2 = a^2 + \frac{2a}{p} + \frac{1}{p^2}$$
$$w_l = a^2$$
$$w_k = (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$\Rightarrow D = pw_h + (1-p)w_l - w_k = p(a^2 + \frac{2a}{p} + \frac{1}{p^2}) + (1-p)a^2 - a^2 - 2a - 1 = pa^2 + 2a + \frac{1}{p} + a^2 - pa^2 - a^2 - 2a - 1 = \frac{1}{p} - 1 > 0$, da $p \in]0,1[$.

Bei einer risikoaversen Nutzenfunktion des Arbeiters sollte der Manager also das System mit Strafe benutzen.