LMU München - SS04 - Spieltheorie

Studenten des Kurses, Prof. Schottenloher

13. Juli 2004

Inhaltsverzeichnis

10 Lektion: Markteintritt; Öffentliches Gut; Duopol bei unvollständiger Information; Bayes-Spiel und Bayes-Gleichgewicht. 2

10.1 Vorwort 2
10.2 Markteintritt 5
10.3 Bayes Spiel in Normalform und Bayes Gleichgewicht 10
10.4 Bereitstellung eines öffentlichen Gutes 12
10.5 Duopol bei unvollständiger Information 14
10.6 Weiterführende Überlegungen 16
10.7 Quellen und Autoren 17

Lektion 10: Markteintritt; Öffentliches Gut; Duopol bei unvollständiger Information; Bayes-Spiel und Bayes-Gleichgewicht.

Nebenthemen:

- (un)vollkommene/(un)vollständige Information
- Form eines Spiels/Lösungskonzept
- Weitere Motivation/Rechtfertigung für gemischte Strategien

10.1 Vorwort

In einem Spiel - ob in der Normalform oder in der extensiven Form - ist vollständige Information unrealistisch.
Vollständige Information bedeutet, dass jeder Spieler über alle Auszahlungsfunktionen informiert ist.
Vollkommene Information bedeutet: Jeder Spieler hat volle Information über alle vorausgegangenenen Züge (Informationsbezirke sind alle Singletons bei Spiel in extensiver Form). Diese Definition macht nur in der extensiven Form Sinn.
Kurze Definition: In einem Spiel mit vollständiger Information kennen alle Spieler alle Spielregeln, sonst ist die Information unvollständig.
Diese Aufteilung wurde erstmals 1967 von John Harsanyi gemacht. Bis zu diesem Zeitpunkt galt die Annahme der Spieltheoretiker, dass ein Spiel mit unvollständiger Information nicht analysiert werden kann. John Harsanyi schlug jedoch eine Remodellierung vor, indem alle Spieler über vollständige Informationen, jedoch nicht über eine vollkommene verfügen. Am Spiel selbst änderte er nichts, er fügte nur die Natur hinzu, die den ersten Spielzug

macht und somit zwischen verschiedenen Mengen der Spielregeln wählt.
Im transformierten Spiel kennen alle Spieler alle möglichen Konstellationen und Spielzüge, und auch dass die Natur den ersten Zug macht, jedoch wissen sie nicht für welche Möglichkeit sich die Natur entscheidet. Dadurch wird ein Spiel mit unvollständiger Information in ein Spiel mit vollständiger Information überführt. Man beachte jedoch, dass diese Information nicht vollkommen ist.
Am Beispiel *Markteintritt* (siehe unten) wird die Vorgehensweise dargestellt.
Unser Interesse gilt also der unvollständigen Information. Die bisher vorgestellten Spiele (mit vollständiger Information) sind nicht realistisch, denn es wird vollständige Information gefordert. Das ist aber kaum möglich, wie man an folgenden Beispielen erkennt.

- *Markteintritt*: Monopolist, der seine Stellung verteidigen möchte, kennt die Kosten, die für den Fabrikbau bzw. für die Modernisierung anfallen. Der Konkurrent, der in den bestehenden Markt eintreten will und mit seinem homogenen Produkt dem Monopolisten Konkurrenz machen wird, kennt die Modernisierungskosten des Monopolisten nicht. Er kann sie jedoch mit gewisser Wahrscheinlichkeit abschätzen. Der Monopolist kennt wiederum nicht die Einschätzung der beim Konkurenten entstehenden Kosten. Dieses Beispiel wird unten ausführlicher behandelt.

- "Kosten für Fabrikbau": wenn zwei Firmen ihre Marktanteile erhöhen wollen, dann kann der Konkurrent die Kosten des Gegners für die Modernisierung bzw. Bau einer neuen Fabrik nur schätzen.

- "Auktionen": hier ist der Wert des Gegenstands für die anderen nicht bekannt, folglich ist auch die Strategie der Mitbietenden unbekannt.

- Kartenspiel: Hier ist zwar eingrenzbar, welche Karten (je nach Spiel von $2\diamondsuit$ bis $A\spadesuit$) die Gegner haben können, jedoch nicht die genaue Kombination.

In der Realität sind Teile der relevanten Informationen private Informationen, also anderen Spielern nicht zugänglich.

Allgemein:

- Private Information über wesentliche Einflüsse auf die Auszahlungsfunktion sind z.T. nicht zugänglich oder teuer(z.B. Kartenspiel, Wetter, Optionen, teilweise nur durch Marktbeobachtung zugänglich, die aber mit hohen Kosten verbunden ist)

- Informationsstand des einen Spielers beeinflußt die Strategie der Anderen.

- Zwänge (Constraints) beeinflussen die Entscheidung des Einzelnen (z.B. Mafia).

Ein Spiel in Normalform mit unvollständiger Information kann in ein Bayes-Spiel (auch Bayes'sches Spiel oder Bayesianisches Spiel) überführt bzw. transformiert werden. Dabei wird *Typ des Spielers* eingeführt.
Definition. Der *Typ* eines Spielers ist die Strategiemenge, Informationszustand und Auszahlungsfunktion, die ihm durch den Spieler "Natur" am Anfang eines Spiels mit unvollständiger Information zugewiesen werden.
Der Zustand der Welt wird durch den "Zug" der Natur bestimmt.
Die Spieler mögen verschiedene Vorstellungen haben, welche Typen die Gegenspieler von der Natur zugeteilt bekommen, jedoch haben am Anfang des Spiels alle Spieler die gleichen Einschätzungen der Wahrscheinlichkeiten bzgl. der möglichen "Züge", die der Natur zur Wahl stehen. Diese Annahme ist bekannt unter dem Namen *Harsanyi doctrine*. Wenn der Spielgestalter dem immer folgt, dann kann nie die Situation eintreten, wo beide Spieler über genau dieselbe Informationsmenge verfügen, aber auseinandergehende Einschätzungen der Wahrscheinlichkeiten bzgl. früherer oder zukünftiger Spielzüge der Natur haben.

Ein kurzes Beispiel zur Verdeutlichung:

Zwei Unternehmen entwickeln ein neuartiges Produkt, das eine Marktlücke füllen soll. Unternehmen A glaubt, dass es mit Wahrscheinlichkeit 0.8 erfolgreich sein wird, und Unternehmen B schätzt die Wahrscheinlichkeit mit 0.4 ein, dass Unternehmen A erfolgreich sein wird. Also werden beide das Produkt entwickeln und somit hohe Entwicklungskosten in Kauf nehmen. Die Situation bzw. der Denkansatz ist aber ganz anders!
Beide Unternehmen sind der Auffassung, dass das Unternehmen A mit seinem Produkt erfolgreich sein wird, und zwar mit der Wahrscheinlichkeit 0.4. Jedoch aufgrund von *privaten Informationen* erhöht sich die Einschätzung von Unternehmen A über seinen eigenen Erfolg, etwa dadurch, dass sie einen brillanten und genialen Forscher und Entwickler Schmidt von der Ludwig-Maximilian-Universität in München für sich gewinnen konnten. Dadurch steigt die Erfolgseinschätzung des Unternehmens A von 0.4 auf 0.8. Wenn das Unternehmen B immer noch plant, hohe Entwicklungskosten in Kauf zu nehmen um in den Markt einzusteigen, also Unternehmen B verhält sich offensiv, so kann Unternehmen A Investitionen des Unternehmens B verhindern, in dem es preisgibt, dass es den besten Forscher und Entwickler auf diesem Gebiet für sich gewonnen hat.
Wenn aber Unternehmen A offensiv vorgehen würde und die Bereitschaft zeigt die hohen Investitionskosten in Kauf zu nehmen, dann könnte Unternehmen B zum Schluß kommen, dass es dem Unternehmen A gelungen ist ein gutes Forscherteam zu verpflichten (es gibt natürlich auch noch die

Möglichkeit, dass Unternehmen A nur so tut, als hätte es ein gutes Forscherteam). Somit müsste Unternehmen B seine Einschätzungen bzgl. des Erfolgs des Unternehmens A überdenken (=update).
Update: Dazu muss das Unternehmen B während des Spiels Informationen sammeln, die fürs Update hilfreich sind, z.B. Prioritäten (in der Lektion 11 ist ein Monopolist "weak" oder "tough"; falls er "tough" ist, so spielt er immer offensiv (d.h. er "kämpft")). Diese Informationen werden verwendet, um damit *bedingte Wahrscheinlichkeiten* zu ermitteln (dazu s. 10.3.5).
Wir wollen jetzt das Bayes-Spiel formal beschreiben, doch zuvor wird ein ausführliches Beispiel behandelt.

10.2 Markteintritt

Akteur/Spieler 1 = *Monopolist* hat die Möglichkeit eine neue Fabrik zu bauen (B) oder nicht zu bauen (NB) (d.h. Investition oder keine Investition).
Akteur/Spieler 2 = *Herausforderer* hat die Möglichkeit sich für den Markteintritt (E) zu entscheiden oder auch dagegen (NE) (also Nicht-Eintritt).
Dabei können zwei Situationen bzgl. der Investitionskosten auftreten(z.B. aufgrund des hohen Ölpreises): Hohe Kosten (H), Niedrige Kosten (N).
D.h. die Typmenge ist T_0={H,N}.

Dann:

H	E	NE
B	$0, -2$	$4, 0$
NB	$4, 2$	$6, 0$

N	E	NE
B	$3, -2$	$7, 0$
NB	$4, 2$	$6, 0$

Bemerkung 1: Der ersten Tabelle wird also die Nutzenfunktion $u_i(\cdot, \cdot, H)$ und der zweiten Tabelle $u_i(\cdot, \cdot, N)$ zugeordnet.

Bemerkung 2: Man kann einen zusätzlichen Parameter α einführen. Durch Vorgabe verschiedener Werte für α kann man beide Situationen H und N mit folgender Tabelle beschreiben:

	E	NE
B	$3 - \alpha, -2$	$7 - \alpha, 0$
NB	$4, 2$	$6, 0$

Kommentar: Für $\alpha = 3$ haben wir die Situation H, für $\alpha = 0$ die Situation N.

Spieler 1 kennt die Baukosten, d.h. Spieler 1 weiß, in welcher Situation er sich befindet.

Spieler 2 kennt die Baukosten nicht, allerdings ist ihm bekannt(etwa durch Schätzungen), dass diese 2 Alternativen möglich sind ($\alpha = 3$ oder $\alpha = 0$).

Spieler 1 weiß nicht, wie Spieler 2 die Lage einschätzt und sich folglich entscheidet. Die Entscheidung von Spieler 2 bedingt die Entscheidung des Spielers 1, denn:

Fakt: Im Falle hoher Kosten H($\alpha = 3$): Spieler 1 hat eine *strikt dominante Strategie* NB, da $4 > 0$ und $6 > 4$.

Fakt: Im Falle niedriger Kosten N($\alpha = 0$): Beste Antwort von Spieler 1 hängt von “Einschätzung” des Spielers 2 ab.

$$s_2 = E \Longrightarrow s_1 = NB$$
$$s_2 = NE \Longrightarrow s_1 = B$$

Um die Situation besser modellieren zu können, brauchen wir also weitere “Werkzeuge”.

Neue Modifikation: Die Wahrscheinlichkeit, die die Einschätzung des Spielers 2 wiederspiegelt, wird eingeführt:

Spieler 2 schätzt die Lage als H bzw. N ein mit Wahrscheinlichkeit ρ bzw. $1-\rho$. $p \in [0,1]$ bzw. $1-p \in [0,1]$ beschreibe die Wahrscheinlichkeit, mit der sich Spieler 1=Monopolist für die Strategie B (bauen) bzw. NB (nicht bauen) entscheidet. Analog sei $q \in [0,1]$ bzw. $1-q \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit mit der sich Spieler 2 für den Eintritt (E) bzw. Nicht-Eintritt (NE) in den Markt entscheidet. Dadurch entsteht auch eine neue Tabelle:

H	(ρ)	q E	$1-q$ NE
p	B	$0,-2$	$4,0$
$1-p$	NB	$4,2$	$6,0$

N	($1-\rho$)	q E	$1-q$ NE
p	B	$3,-2$	$7,0$
$1-p$	NB	$4,2$	$6,0$

Oder nur mit α:

ρ für $\alpha = 3$ $1-\rho$ für $\alpha = 0$		q E	$1-q$ NE
p	B	$3-\alpha,-2$	$7-\alpha,0$
$1-p$	NB	$4,2$	$6,0$

Wir suchen nach Nash-Gleichgewichten.
Mit $q \in [0,1]$ = Wahrscheinlichkiet, mit der Spieler 2 die Strategie E wählt gilt im Falle niedriger Kosten N für die Nutzenfunktion:

$u_1(B,q,N) = 3q + 7(q-1) = 7 - 4q$
$u_1(NB,q,N) = 4q + (1-q) \cdot 6 = 6 - 2q$
$u_1(B,q,N) > u_1(NB,q,N) \Leftrightarrow 7 - 4q > 6 - 2q \Leftrightarrow q < \frac{1}{2}$

Das bedeutet, dass für $q < \frac{1}{2}$ Spieler 2 den Markteintritt wählt und folglich Spieler 1 sich für das Bauen entscheiden sollte.
Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 Strategie B wählt, dann ist die beste Antwort von Spieler 1 auf Strategie q (also E=Eintritt) des Spielers 2:

$$p^*(q) = \begin{cases} \{1\} & q < \frac{1}{2} \\ [0,1] & q = \frac{1}{2} \\ \{0\} & q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Jetzt betrachten wir den Nutzen des Spielers 2 im Falle, dass er sich für Markteintritt entscheidet und mit der Wahrscheinlichkeit ρ die Situation als H einschätzt. Dann: $u_2(E,p) = \rho \cdot 2 + (1-\rho) \cdot *$,
wobei 2 (siehe $\rho \cdot 2$) für die Entscheidung des Monopolisten (Spieler 1) für das Nichtbauen steht, da wir uns in der Situation H befinden;
$*$ wird folgendermaßen ermittelt:
Hier gibt es *keine* dominante Strategie, denn im Falle eines Markteintritts des Spielers 2 wird Spieler 1 nicht bauen. Es ist jedoch vorteilhafter, wenn Spieler 1 baut, falls Spieler 2 nicht in den Markt eintritt. Somit gilt:

$(1-\rho) \cdot * = (1-\rho)(p(-2) \cdot +(1-p) \cdot 2)$.
Also: $u_2(E,p) = \rho \cdot 2 + (1-\rho)(p(-2) + (1-p) \cdot 2) =$
$= 2\rho + (2-4p) - \rho(2-4p) = 2 - 4p(1-\rho)$

Sei nun $p_0 := \frac{1}{2(1-\rho)}$. Es gilt: $p < p_0 \Leftrightarrow u_2(E,p) = 2 - 4p(1-\rho) > 0$

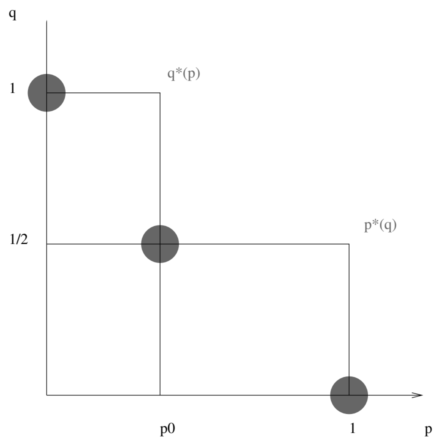
Sei q die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 Strategie E wählt, dann ist die beste Antwort von Spieler 2 auf Strategie p (also B=Bau) des Spielers 1:

$$q^*(p) = \begin{cases} \{1\} & p < p_0 \\ [0,1] & p = p_0 \\ \{0\} & p > p_0 \quad (p_0 > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Bemerkung 3: Falls $\rho > \frac{1}{2}$ (also Eintritt) ergibt sich $p_0 \geq 1 \Rightarrow q^*(p) = \{1\}$.
Nash-Gleichgewichte für nicht-degenerierten Fall ($0 \leq \rho < \frac{1}{2}$ und somit $p_0 < 1$):

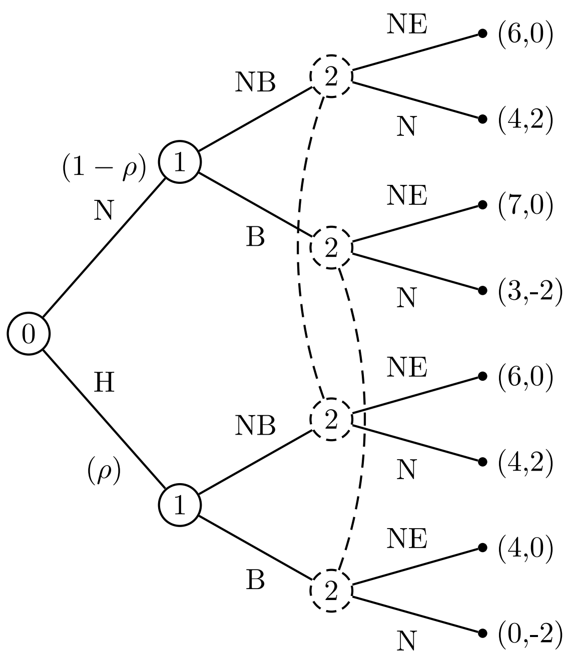
Es ergeben sich insgesamt 3 Graphen der besten Antworten:

- Falls $\rho < \frac{1}{2}$, dann sind die Schnittpunkte von $p^*(q)$ und $q^*(p)$ und somit Gleichgewichte: $(p_1 = 0, q_1 = 1), (p_2 = p_0, q_2 = \frac{1}{2}), (p_3 = 1, q_3 = 0)$;
- Falls $\rho = \frac{1}{2}$, dann sind die Schnittpunkte von $p^*(q)$ und $q^*(p)$ und somit Gleichgewichte: $(p_1 = 0, q_1 = 1), (p_2 = p_0 = 1, 0 \leq q_2 \leq \frac{1}{2})$;
- Falls $\rho > \frac{1}{2}$, dann ist der Schnittpunkt von $p^*(q)$ und $q^*(p)$ und somit ein Gleichgewichtspunkt: $(p_1 = 0, q_1 = 1)$.



1.Botschaft: ρ beeinflusst Spieler 1.

2.Botschaft: Nach Harsanyi ist eine Unterscheidung zwischen Spielen mit unvollständiger Information und unvollkommener Information überflüssig, da sich Spiele mit unvollständiger Invormation in Spiele mit unvollkommener Information transformieren lassen.
Trick: Es wird zu Beginn ein Spieler "Natur" (Nr. 0) eingeführt, der sich zwichen N und H mit einer Wahrscheinlichkeit ρ entscheidet. Diese neue Situation führt zu folgenden Spielbaum:



3. Botschaft: Neue Form des Spiels, mit folgender Eigenschaft, das dem Spieler j verschiedene *Typen* $t_1, ..., t_n$ zugeordnet sind.

10.3 Bayes Spiel in Normalform und Bayes Gleichgewicht

Unvollständige Information kann sich im allgemeinen, wie schon im Vorwort erwähnt wurde, auf viele verschiedene Aspekte des Spiels beziehen:

- die Informationslage der Gegenspieler
- die Strategieräume der Gegenspieler
- die Auszahlungsfunktion der Gegenspieler

Harsanyi stellte eine allgemeine Methode vor, die es ermöglicht, alle vorher genannten Informationsunvollständigkeiten sehr elegant zu modelieren. Dazu fast man die private Information von Spieler i in seinem *Typ* $t_i \in T_i$ zusammen.

10.3.1 Definition (Typ). Jedem Spieler j (eines Spiels mit n Spielern) ist eine Menge T_j von *Typen* zugeordnet.
Ein n - Tupel $t_1, ..., t_n = t \in T := T_1 \times T_2 \times ... \times T_n$ ist ein "Typenprofil".
Notation: $t = (t_j, t_{-j}) = (t_{-j}, t_j)$ & $t_j \in T_j$ & $t_{-j} \in T_{-j} = \prod_{i \neq j} T_i$

10.3.2 Bemerkung. *Aufgrund oben angeführter Definition ergibt sich für die Auszahlungsfunktion von Spieler i, dass diese nicht nur von den gewählten Strategien aller Spieler, sondern auch von seinem Typ abhängt:*
$u_i = u_i(s_i, s_{-i}, t_i)$ $\qquad u_i : S_i \times S_{-i} \times T_i \to \mathbb{R}$

10.3.3 Beispiel (Typ).

- Spieler i besitzt alleinige Kenntnis über seine möglichen Strategien. Falls einem bestimmten *Typ* t_i^- von Spieler i eine Aktion $s_i^- \in S_i$ nicht verfügbar ist, ist anzunehmen, dass:
  $u_i(s_i^-, s_i, t_i^-) = -\infty \ \forall s_{-i} \in S_{-i}$
- Spieler i besitzt alleinige Kenntnis über seine Auszahlungen, beispielsweise über seine Kostenfunktion, seine Liquidität, etc.
- Spieler i handelt nicht rational und wählt immer eine bestimmte Aktion s_i^*, obwohl diese nicht seine Auzahlung maximiert. Dann existiert ein *Typ* t_i^*, dessen Auszahlungfunktion so ist, dass s_i^* eine dominate Strategie ist.

10.3.4 Definition (Bayes-Spiel in Normalform). Das Spiel ist gekennzeichnet durch n Spieler (n $\geq$ 2) mit Strategiemengen S_j, den Typenmengen T_j, einer Wahrscheinlichkeitsdichte p auf T und einer Auszahlungsfunktion.

$$u : S \times T \to \mathbb{R}^n$$

Spielverlauf: Das Spiel beginnt mit dem Zug der Natur (Spieler 0). 0 Wählt $t \in T$ mit der Wahrscheinlichkeit $p(t)$. Jeder Spieler j wird über t_j informiert, nicht aber Spieler $k \neq j$. Spieler wählen jetzt wie üblich ihre Strategien. Eine Strategie von Spieler j ist eine Abbildung $s_j : T_j \to S_j$, die Gesamtheit der Strategien also $S_j^{T_j}$ und die Gesamtheit der Strategieprofile $\prod_{j=1}^{n} S_j^{T_j}$
Ein Spieler j kann unter gewissen Bedingungen aus der Festlegung seines $Types$ t_j Rückschlüsse ziehen auf andere $Typen$. Dazu wird die Regel von Bayes über bedingte Wahrscheinlichkeiten verwendet.

10.3.5 Definition (bedingte Wahrscheinlichkeit). Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in P$ mit $P(A) > 0$. Für jedes $B \in F$ ist

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A bezüglich P.

10.3.6 Satz (Fallunterscheidungs- und Bayes-Formel). *Sei* (Ω, F, P) *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\Omega = \bigcup_{j \in J} B_j$ *eine hochstens abzählbare Zerlegung von* Ω *in paarweise disjunkte Ereignisse* $B_j \in F$. *Dann gilt:*

a) die Fallunterscheidungsformel: Für alle $A \in F$

$$P(A) = \sum_{j \in J} P(B_j) P(A|B_j)$$

b) die Formel von Bayes(1763): Für alle $A \in F$ *mit* $P(A) > 0$ *und alle* $i \in J$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum P(B_j) \cdot P(A|B_j)}$$

10.3.7 Bemerkung. *Aus vorigem Satz folgt falls* J *eine einelementige Menge ist die Beziehung:* $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) \Rightarrow P(B|A) = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}$

In unserem Fall ist die Annahme wichtig, dass alle Spieler von derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung ausgehen, mit der die Natur die $Typen$ auswählt.

p auf T $(= \Omega)$, $T < \infty$, p gegeben durch $p(t) \in [0, 1]$, $t \in T$ & $\sum_{t \in T} p(t) = 1$
$p(t_j)_{t_j \in T_j} := \sum_{t_{-j} \in T_{-j}} p(t_{-j}, t_j)$ (≤ 1)

Es folgt das jeder Spieler j weiß, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung die Gegenspieler $-j$ vom Typ t_{-j} über den Typenraum T_j haben. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(t_{-j}|t_j) := \frac{p(t_{-j}, t_j)}{p(t_j)}$ auf T_{-j} des Spielers j über die $Typen$ seiner Gegenspieler wird "Belief" genannt. Die Wahrscheinlichkeiten aller $Typen$ sind in diesem Fall miteinander korreliert.

Interpretation: Die Spieler bilden ihre subjektiven Wahrscheinlichkeiten, in denen die Vermutung des *Typs* der Gegenspieler zum tragen kommt. Wann immer sie im Verlaufe des Spieles neue Information erhalten, können sie die Information benutzen, um ihre Erwartung über den *Typ* des Gegenspielers zu revidieren.

10.3.8 Definition (Bayes-Gleichgewicht). Ein Bayes-Gleichgewicht ist ein Strategieprofil $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$, $s_j^* : T_j \to S_j$, wenn für jeden Spieler j und jeden *Typ* $t_j \in T_j$ die Strategie $s_j^*(t_j) \in S_j$ die Funktion

$$s_j \to \sum_{t_{-j} \in T_{-j}} p(t_{-j}|t_j) \cdot u_j(s_1^*(t_1), ..., s_j, ..., s_n^*(t_n), t_1, ..., t_n)$$

maximiert wird in $s_j^*(t_j)$.

10.4 Bereitstellung eines öffentlichen Gutes

Zwei Spieler $i = 1, 2$ haben die Möglichkeit ein öffentliches Gut bereitzustellen dargestellt durch Beteiligung/Nichtbeteiligung. Falls mindestens ein Spieler sich dazu bereit erklärt das Gut anzubiten ist die Auszahlung 1, ansonsten ist sie gleich 0.

$$\delta_i(c_i) = \begin{cases} 0 & \textit{Nichtbeteiligung} \\ 1 & \textit{Beteiligung} \end{cases}$$

Die Bereitstellung ist verbunden mit anderen nicht bekannten Kosten, $c_1, c_2 > 0$. Sei dazu folgende Auszahlungsmatrix gegeben:

Spieler 1 \ 2	Beteiligung	Nichtbeteiligung
Beteiligung	1 - c_1 , 1 - c_2	1 - c_1 , 1
Nichtbeteiligung	1 , 1 - c_2	0 , 0

Die Kosten sind unabhängig voneinander und gleichverteilt auf $[0, 2]$. Kenntniss über die eigenen Kosten besitzen nur die betroffenen Spieler, wärend die Auszahlungen und die Gleichverteilung der Kosten auf $[0, 2]$ ($[c_0, 2], c_0 > 0$) allen bekannt ist. Der *Typ* des Spielers ist gekennzeichnet durch seine Kosten; c_i ist *Typ* von $i = 1, 2$. Eine Aktion $s_i(c_i)$ wird durch eine reine Strategie s_i bestimmt für jedem möglichen *Typ* c_i. Die Unwissenheit der Gegenspieler darüber welchem *Typ* der Spieler entspricht, veranlaßt sie für jeden möglichen *Typ* dessen Handlung vorrauszuahnen (Bayes-Formel), um ihre eigene Handlungsweise zu optimieren. Das Gut wird bereitgestellt falls $s_1(c_1) = 1$ oder $s_2(c_2) = 1$ ist, das Bedeutet falls die Gleichung $\max\{s_1, s_2\} = 1$ erfüllt ist. Wie schon vorhin erwähnt treten Kosten nur bei einer Beteilingung eines Spielers auf. Diese werden durch den Ausdruck $c_i \cdot s_i(c_i)$ dargestellt. Zusammengefasst ergibt sich folgende Auszahlungsfunktion:

$$u_j(s_1, s_2, c_j) = \max\{s_1, s_2\} - c_j \cdot s_j$$

Nun ist aber die Bayes´ Strategie, das Paar von Strategien (s_1^*, s_2^*) von interesse, sodass die erweiterte Auszahlung für Spieler 1 und jeden *Typ* c_1

$\mathbb{E}(u_1(s_1, s_2^*(c_2), c_1)) = \sum_{c_{-1} \in T_{-1}} p_1(c_{-1}|c_1) \cdot u_1(s_1, s_2^*(c_2), c_1)$

zu maximieren ist durch $s_1^*(c_1)$. Ebenso ist

$\mathbb{E}(u_1(s_1^*(c_1), s_2, c_2)) = \sum_{c_1 \in T_1} p_2(c_1|c_2) \cdot u_1(s_1^*(c_1), s_2, c_2)$

zu maximieren durch $s_2^*(c_2)$.

Sei q die Wahrscheinlichkeit mit der sich Spieler 2 am Spiel beteiligt. Spieler 1 beteiligt sich am Spiel, wenn $u_1(\text{Beteiligung}) = 1 - c_1 \geq q = u_2(\text{Nicht Beteiligung})$ (oder " $>$ ", nur dann Erhöhung) ist, also falls $\Rightarrow 1 - q \leq c_1$. Es ergibt sich für die Strategie des 1 Spielers:

$$s_1^*(c_1) = \begin{cases} 1 & \mathit{wenn} \quad c_1 \leq 1 - q \\ 0 & \mathit{sonst} \end{cases}$$

Die *Typen*, die sich beteiligen liegen also im Intervall $[0, 1 - q]$. Analog geht man bei Spieler 2 vor: Nur falls die *Typen* die Eigenschaft $c_2 \in [0, 1 - p]$ besitzen ist eine Beteiligen vorhanden.

10.4.1 Bemerkung (Struktur der Strategien). *Beteiligung ist nur bei geringen Kosten vorhanden. Aufgrund deren Gleichverteilung ist die Wahrscheinlichkeit geringere Kosten als einen kritischen Wert* c^- *zu erlangen genau* $\frac{c^-}{2}$. *Daraus folgt für die Beteiligung der Wert* $\frac{c^-}{2}$ *und für die Nichtbeteiligung der Wert* $1 - \frac{c^-}{2}$.

Für die Kosten des Spielers 2 bedeutet es, dass die Bedingung $c_2 \leq 1 - q$ erfüllt werden muss. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 sich am Spiel beteiligt ist somit durch $q = \frac{1-p}{2}$ gegeben. Für Spieler 1 ergibt sich analog $c_1 \leq 1 - q = \frac{1+p}{2} =: c_1^*$, d.h. er beteiligt sich am Spiel mit Wahrscheinlichkeit $\frac{c_1^*}{2} = p$. Faßt man nun alle vorigen Ergebnisse zusammen, so folgt:

$$c_1^* = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{c_1^*}{2}) \Rightarrow c_1^* = \tfrac{2}{3}$$

Aufgrund der Symmetrie der Auszahlungsmatrix folgt selbiges Ergebniss für Spieler 2. Zusammengefasst ist die Bereitschaft der Spieler ein öffentliches Gut zur Verfügung zu stellen nicht vorhanden, falls die Kosten höher als $\frac{2}{3}$ sind. Dies würde auch so sein, falls der erwartete Nutzen der Beteiligten die individuellen Kosten mit $\frac{3}{4}$ übertrifft. Die Wahrscheinlichkeit eines Spielers das Gut zur Verfügung zu stellen, ist mit $\frac{1}{3}$ als gering einzuschätzen.

10.5 Duopol bei unvollständiger Information

In bisherigen Überlegungen wurde immer davon Ausgegangen, dass in einem Markt mit einem homogen Produkt und zwei Anbietern bei dem der Wettbewerb über die simultan getroffene Angebotsmenge ausgetragen wird, die beteiligten Firmen über alle Gegebenheiten Kentniss besitzen. Meist verfügen die Firmen über die Gegebenheiten jedoch nur über geringe Kentnisse, da z.B. die Produktionskosten sich schwer abschätzen lassen oder die Kosten, die mit der Beschafung von Information durch Agenten entstehen, zu hoch sind. Ein Einblick wie bei einer solchen Situation trotzdem eine Optimierung der Handlungsweise durchgeführt werden kann, liefert folgendes Beispiel. Zwei konkurrierende Firmen besitzen alleinige Kenntnis über ihre Grenzkosten. Zur Vereinfachung des Beispiels geht man davon aus, dass die Kostenfunktionen $C = c_i \cdot x_i$ linear sind. Eine mögliche Auszahlungsmatrix mit hohen und niedrigeren Grenzkosten hätte beispielsweise folgende Gestallt:

Unternehmen 1 \ 2	Hohe Kosten	Niedrige Kosten	Summe
Hohe Kosten	0.4	0.1	0.5
Niedrige Kosten	0.05	0.45	0.5
Summe	0.45	0.55	

Bieten beide Firmen ihr Produkt in Mengen zu $0 \leq q_i \leq 1$ an und ist die Preisfunktion gleich $p = 2 - q_1 - q_2$, so erhält man eine Auszahlung von

$$u_i = q_i(2 - q_i - q_j) - c_i q_i$$

Typbestimmend sind die Grenzkosten c_i. Eine Vereinfachung der Auszahlung erhält man mit der Typbezeichnung $t_i = 2 - c_i$:

$$u_i = q_i(t_i - q_i - q_j)$$

Unternehmen 1 verfolgt die Strategie bei hohen Kosten x_H, bei niedrigeren Kosten x_N anzubieten. Die Stratgie des Unternehmens 2 ist bei hohen Kosten y_H und bei niedrigeren Kosten y_N anzubieten. Unternehmen 1 wird um seine Strategie zu optimieren nach dem Bayes Gleichgewicht die Summe

$$\max_{x_H,x_N} u_1 = p(t_2 = H|t_1 = H)u_1(x_H, y_H) + p(t_2 = N|t_1 = H)\cdot \\ u_1(x_H, y_N) + p(t_2 = H|t_1 = N)u_1(x_N, y_H) + p(t_2 = N|t_1 = N)u_1(x_N, y_N)$$

zu maximieren versuchen. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten lassen sich hier mit Hilfe der Bayes Regel berechnen:

$$\begin{aligned} p(t_2 = H|t_1 = H) &= \tfrac{0.4}{0.4+0.1} = \tfrac{4}{5} \\ p(t_2 = N|t_1 = H) &= \tfrac{0.1}{0.4+0.1} = \tfrac{1}{5} \\ p(t_2 = H|t_1 = N) &= \tfrac{0.05}{0.05+0.45} = \tfrac{1}{10} \\ p(t_2 = N|t_1 = N) &= \tfrac{0.45}{0.05+0.45} = \tfrac{9}{10} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Maximierungsproblem:

$\max_{x_H, y_N} \frac{4}{5} x_H(H - x_H - y_H) + \frac{1}{5} x_H(H - x_H - y_N) + \frac{1}{10} x_N(N - x_N - y_H) + \frac{9}{10} x_N(N - x_N - y_N)$

zu optimieren sind:

$\frac{\delta u_1}{\delta x_H} = -\frac{4}{5} x_H + \frac{4}{5}(H - x_H - yH) - \frac{1}{5} x_H + \frac{1}{5}(H - x_H - y_N) = 0$
$\frac{\delta u_1}{\delta x_N} = -\frac{1}{10} x_N + \frac{1}{10}(N - x_N - y_H) - \frac{9}{10} x_N + \frac{9}{10}(N - x_N - y_N) = 0$

Daraus folgt das Gleichungssystem:

$$x_H = \frac{H}{2} - \frac{4}{10} y_H - \frac{1}{10} y_N$$
$$x_N = \frac{N}{2} - \frac{1}{20} y_H - \frac{9}{20} y_N$$

Aufgrund der Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsverteilung von hohen und niedrigen Kosten im Bezug auf beide Untenehmen ergibt sich $x_N = y_N$ und $x_H = y_H$. Eingestzt in die vorher angeführten Gleichungen erhält man die Lösung

$$x_H = \frac{29 \cdot H - 2 \cdot N}{81} \text{ und } x_N = \frac{28 \cdot N - H}{81}$$

für die optimale Strategie beider Spieler.

10.6 Weiterführende Überlegungen

- Dynamische Spiele mit unvollständiger Information:
  Analog zu den dynamischen Spielen mit vollständiger Information, stellt sich bei dynamischen Spielen mit unvollständiger Information das Problem auf, Gleichgewichte zu eliminieren die auf unglaubwürdigen Drohungen beruhen. Der Anreiz der Teilspielperfektheit geht bei unvollständiger Information verlorren. Es existiert keine einelementige Informationsmenge, nachdem durch den Spieler "Natur" die *Typen* bestimmt wurden, da die Spieler keine Kentniss über die *Typen* ihrer Gegenspieler besitzen. Jedoch wird hier die Idee des Begriffs Teilspielperfektheit erweitert bzw. veralgemeinert, indem man Fortsetzungsspiele (continuation games) betrachtet. Fortsetzungsspiele können auch mit mehrdeutigen Informationsmengen beginnen. Allerdings, muss der Spieler, der in einer mehrelementigen Informationsmenge am Zuge ist, dem Entscheidungknoten der Menge in welchem er sich befindet, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zuordnen bzw. einen "Belief" besitzen. Die Analyse des "sequentielen rationalen Verhaltens" führt dabei zu einem neuen Gleichgewichtskonzept-Begriff, zum Perfekten Bayes Gleichgewicht.

- Bayes Spiel in gemischten Strategien:
  In gemischten Strategien wird der Erwartungswert über die Aktionsprofile s_{-j} gebildet, zusätzlich zu jedem Typenprofil t_{-j}. Mit $\sigma_k(s_k|t_k)$ wird die Wahrscheinlichkeit mit der Spieler k vom *Typ* t_k die Aktion s_k wählt bezeichnet. Entspricht das Typenprofil t_{-j}, so wird s_{-j} mit der Wahrscheinlichkeit $\sigma_{-j}(s_{-j}|t_{-j}) = \prod_{k \neq j} \sigma_k(s_k|t_k)$ gespielt. Es ergibt sich als erwartete Auszahlung für Spieler j vom Typ t_j, falls er sich für das Strategieprofil s_j entscheidet: $u_j(s_j, \sigma_{-j}, t_j) =$
  $= \sum_{t_{-j} \in T_{-j}} p_j(t_{-j}|t_j) \sum_{s_{-j} \in S_{-j}} \sigma_{-j}(s_{-j}|t_{-j}) u_j(s_j, s_{-j}, t_j)$

10.7 Quellen und Autoren

Quellen

Sieg Gernot: Spieltheorie - München; Wien: Oldenburg 2000
Georgii, Hans-Otto: Stochstik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statisik - Berlin; New York: de Gruyter, 2002
Manfred J. Holler, Gerhard Illing: Einführung in die Spieltheorie; Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Eric Rasmunsen: Games & Information; 2nd edition, 1994

Autoren

Schumann Elena, Czauderna Peter