1 Einsatz von Partnern in einer Kooperation

1.1 Einleitung

Diese Lektion wird anders als die Vorangegangenen in der gesamten Ausrichtung und Zielsetzung:

Bisher: Beispiele darstellen, um wesentliche Aspekte der Spieltheorie zu beschreiben. Anhand der Beispiele Weiterentwicklung der Struktur, der Theorie und der Resultate (bzw zu den Anwendungen, allerdings nur andeutungsweise) d.h. Beispiele → Struktur, Ergebnisse → Anwendungen

Jetzt: Problemkreis festlegen und eingrenzen (hier: 'Einsatz'), der mit verschiedenen Methoden der Spieltheorie untersucht wird. Der bisherige Stand der Vorlesung (Lektion 1-7) liefert das Instrumentarium um das Problem anzugehen.

Problemkreis: Einsatz und Mitarbeit im Rahmen einer Kooperation

1.1.1 Beispiel.

- Vereine und Vereinsarbeit: wenige zeigen grossen Einsatz ?ber den Mitgliedsbeitrag hinaus. Alle Mitglieder profitieren voon dem Ergebnis gleichermassen.
- Unternehmens?bergreifende Kooperation: Strategische Allianz, Supply Chain, Networks of Excellence, Joint Venture, ... im Bereich Entwicklung
- Teamarbeit im Unternehmen
- Kanzlei, Ärztehaus, ...
- Principal - Agent: Aktieneigentümer - Manager Bei grosser Streuung des Aktienkapitals ist der Aufwand für eine ernsthafte Kontrolle (zu) gross für einen einzelnen Aktienbesitzer: Corporate Governance

Frage: Wie stehen sich Gesamtinteresse und Individualinteressen gegen?ber? Welchen Nutzen bringt welcher Einsatz?

Tendenz: Individueller und gemeinschaftlicher Nutzen stehen im Konflikt. Extremfall: Trittrettfahrer auf der einen Seite, Höchsteinsatz auf der anderen (vgl Gefangenendilemma).

1.2 Ein einfaches Kooperationsspiel

Es gibt n Spieler $1..n$, Spieler j bringt den Einsatz $e_j \in \mathbb{R}$. Das Gesamtergebnis sei $R(e_1..e_n) \in \mathbb{R}$, der Gesamtnutzen: $U(e_1..e_n) := R(e_1..e_n) - \sum_{j=1}^n e_j$. Der Individuelle Nutzen f?r Spieler k sei $u_k(e_1..e_n := \alpha_k R(e_1..e_n) - e_k$ (in der Regel $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, hier zur Vereinfachung $\alpha_k = \frac{1}{n} \forall k$). **Modellannahme:** $R(e_1..e_n) = \sum_{j=1}^n \sqrt{e_j}, e_j \in [0,1]$

1.2.1 Gesamtnutzen

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass alle gleichen Einsatz $e_k = e \forall k$ bringen, dann: $\Rightarrow U(e) = n(\sqrt{e} - e)$ hat Maximum in $e = \frac{1}{4}$, denn: $\frac{\partial U}{\partial e} = n\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{e} = \frac{1}{2}$ und $e = \frac{1}{4}$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial e^2}|_{\frac{1}{4}} = -\frac{n}{4}\frac{1}{\sqrt{e^3}} = -2n \leq 0$ Damit ist $U(\frac{1}{4}) = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{n}{4}$, $R = \frac{n}{2}$, $u_k(\frac{1}{4}, .., \frac{1}{4}) = \frac{1}{n}\frac{n}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, d.h. der Einsatz wird verdoppelt!

1.2.2 Einzelnutzen

F?r Spieler k ist $u_k(e_1..e_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \sqrt{e_j} - e_k = \frac{1}{n}\sqrt{e_k} - e_k + C$ mit $C := \sum_{j \neq k} \frac{1}{n}\sqrt{e_j}$ konstant aus Sicht von j, weil seine Strategiewahl keinen Einfluss darauf hat.

$0 = \frac{\partial u_k}{\partial e_k} = \frac{1}{2n\sqrt{e_j}} - 1 \Rightarrow e_j = \frac{1}{4n^2}$, $R(e_1^N, .., e_n^N) = n\sqrt{\frac{1}{4n^2}} = \frac{1}{2}$

$e_k^N = \frac{1}{1n^2}$ ist also NashGleichgewicht. F?r grosse n ist dieses NashGleichgewicht sehr weit vom Paretooptimum $e_k = \frac{1}{2}$ entfernt. F?r den Payoff gilt:

$u_k(e^n) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} = \frac{2n-1}{4n^2}$, der Payoff wird also bei grossem n schnell sehr klein.

Fazit: Bei 'rationaler' Entscheidung w?hlen alle die Trittbrettfahrerstrategie mit kleinem Einsatz, obwohl das Ergebnis schlechter ist (vgl Situation beim Gefangenendilemma).

Tats?chlich: Bei $n = 2$ Spielern mit $e^p = \frac{1}{4}, e^n = \frac{1}{16}$ als m?gliche Strategien erhalten wir ein 2×2 Spiel vom Typ Gefangenendilemma:

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{16}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

1.3 Kollektivgutspiel

Jeder zahlt $e_j \in [0, E]$ in einen gemeinsamen Topf. Dieser Topf vermehrt sich im Wert um den Faktor C und wird dann gleichm?ssig auf die Spieler aufgeteilt.

$$U = C\sum_{j=1}^n e_j - \sum_{j=1}^n e_j = (C-1)\sum_{j=1}^n e_j$$

$$u_k = \frac{1}{n}C\sum_{j=1}^n e_j - e_k = (\frac{C}{n} - 1)e_k + \frac{C}{n}\sum_{j \neq k} e_j$$

Offensichtlich gilt bei $C > 1$:

$$e_{max} = E, \quad U(E, .., E) = (C-1)nE, \quad u_k(E, .., E) = (C-1)E > 0$$

f?r $1 < C \leq n$ ist $e^p = E$ Paretooptimum, $e^N = 0$ Nashgleichgewicht.

1.3.1 Satz. *Unter vern?nftigen Bedingungen an $R = R(e_1, .., e_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind Paretooptimum e^p und Nashgleichgewicht e^N verschieden mit $U(e^N, .., e^N) < U(e^p, .., e^p)$.*

Folgerung

Nur das Trittbrettfahren ist eine rationale Strategie! $\Rightarrow$ Kooperationen gehen in der Regel schief - oder das Modell stimmt nicht!

Nat?rlich: Das Modell ist

- zu einfach und
- widerspricht experimentellen Resultaten

1.4 M?ngel des Modells

Will man nahe am Modell bleiben und den Konflikt zwischen Gemeinschaftsinteresse und Individualinteresse aufl?sen, so muss diskutiert werden was denn zu $e_j = e$ f?hren kann. Im Alltag:

- Vertrauen: wenn j sicher sein kann dass alle mitziehen, so w?hlt er Pareto-Effizienz
- Vertrauen durch Wiederholung, Transparenz, Kontrolle. Informationsfluss ist wichtig: bei glaubw?rdigen Informationen und Transparenz niedrige Kontrollkosten (vgl iterierte Spiele)
- durch Vertrag und Vertragsstrafe (allerdings ist oft Kontrolle und Durchsetzung mit hohen Kosten verbunden, $\to$ Vertragstheorie)
- Fairness
- Anpassungsdruck
- Normen
- Reputation (f?r weitere Kooperationen wichtig)

1.4.1 Spezialf?lle

- Entwicklungspartnerschaft: Ergebnis muss nicht geteilt werden. Bei Einsatz $\sum_{j=1}^{n} \leq C \quad R \equiv 0$, sonst $R \geq R_0 \gg 0$. Bei grossem Einsatz ergibt sich Zusatznutzen f?r j proportional zu e_j!
- Sourcing, Supply Chain: alle Glieder wichtig, $\inf e_i \leq C \Rightarrow R = 0$.

1.5 Modifikationen

a) Zusatznutzen wie Know-How, Kontakte, Ressourcen etc. werden durch die Funktion

$$u_k(e_1, \dots, e_n) = \frac{1}{n}(\sum \sqrt{e_j}) - e_k + g(e_k), \quad (g > 0)$$

modelliert.

Sei zum Beispiel: $g(e_k) = \alpha e_k$, $\alpha > 0$.

Den maximalen Individualnutzen bestimmt man so mit:

$$\frac{\partial u_k}{\partial e_k} = \frac{1}{2n\sqrt{e_k}} - (1-\alpha) \to e_k = \frac{1}{4n^2(1-\alpha)^2}.$$

Wenn α nahe bei 1 liegt ($\alpha < 1$), so ist $e_k = \frac{1}{4n^2(1-\alpha)^2}$ nahe bei $\frac{1}{4}$ ($\equiv e^P_{max}$, bei gro?em n).

b) Der Punkt „Anpassung" wird ebenso wie in **a)** behandelt. Dabei stehen die Befriedigung der Anpassungsbed?rfnisse, der Fairness, der Reziprozit?t (Gegenseitigkeit), der Befolgung von Normen, der Pflege der Reputation usw. im Vordergrund.

Diese Verhaltensweisen sind insofern interessant, da sie das Verhalten beim Spiel beeinflussen, also zu ber?cksichtigende Faktoren in der Spieltheorie darstellen und da weiter die Spieltheorie diese Verhaltensweisen beeinflusst (in vereinfachter Darstellung: Normen $\Longleftrightarrow$ Spieltheorie).

c) Ein Spezialfall ist die *Entwicklungspartnerschaft*. Man kann dann die Ergebnisfunktion R folgenderma?en darstellen:

$$R(e_1, \dots, e_k) = \begin{cases} 0 & \text{f?r } \sum e_j \leq C \\ R_0 & \text{f?r } \sum e_j \geq C \ (R_0 > 0) \end{cases}$$

Dann gilt f?r den Gesamtnutzen: $U = R - \sum e_j$ bzw.

$$U(e) = R(e, e, \dots, e) - \sum e_j = \begin{cases} R_0 \\ 0 \end{cases} + (-\sum e_j)$$

mit $e^P_{max} = \frac{C}{n} = e$.

Offensichtlich stellt die Bedingung $\sum e_j \geq C$ f?r einen Wert von R eine schwierige Schwelle dar, denn Spieler k kann sich nicht ohne weiteres auf seine Mitspieler verlassen.

d) In manchen F?llen des Einsatzes von Partnern im Berufsleben liegt ein Pareto-Optimum vor, wie z.B. bei erfolgreich funktionierenden Anwaltskanzleien oder ?rzteh?usern. Bedingungen f?r eine gelungene Kooperation sind der regelm??ige Austausch von Informationen unter den Partner, um so eine Transparenz der Leistungen und Vorhaben zu schaffen, die eine gegenseitige Kontrolle der Partner ohne gr??eren Aufwand erm?glicht.

Eine hohe Informationsdichte und Transparenz unter den Partnern erzeugt Vertrauen.

Man muss bei diesen kooperativen „Spielen" aber beachten, dass nicht ein Spiel mit nur einer Runde stattfindet, sondern dass ein iteriertes Spiel vorliegt.

Ein Beispiel f?r ein solches iteriertes Spiel, dass sich auf nur zwei Partner bezieht, ist das iterierte Gefangenendilemma ohne festgelegtes Ende, d.h. die Anzahl der Runden ist offen. Man erh?lt also ein unendlich oft iteriertes Gefangenendilemma.

Zumindest ist bekannt, dass ein Nash-Gleichgewicht mit der optimalen (nicht-Nash-)-Strategie existiert (dabei kann der Diskontfaktor δ sehr hoch angesetzt werden, z.B.: $\delta = 1$).

e) Trust and Control in Networks

Wir zeigen nun ein Spiel, dass zeigen soll, wie sich eine moderate Kontrolle in einer Verst?rkung des Vertrauens auswirkt.

Ausgangsspiel ist das Gefangenendilemma als symmetrisches Spiel in der Form

	T	D
T	1	-2
D	2	-1

mit dem „Truster" (T) und dem „Defector" (D).

Das Spiel ist durchaus sinnvoll gew?hlt, denn die Ausgangslage entspricht ja dem Gefangenendilemma (siehe **d)**). Durch den „Inspector" (I) wird ein neuer Typ dem Spiel hinzugef?gt. Der „Inspector" pr?ft seine Gegenspieler sowie sich selbst und trifft mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha \in]0,1]$ die Wahrheit der ihm gegebenen Aussagen, d.h. er entdeckt die Strategiehaltung T (bzw. D bzw. I) mit der Wahrscheinlichkeit α.

Glaubt I nun in einem Spieler die Strategie T oder I zu erkennen, so spielt er. Glaubt er aber in einem Spieler die Strategie D zu erkennen, so spielt er nicht und die Auszahlung wird f?r beide, „Inspector" und Spieler, Null. Damit ergeben sich die Auszahlungen:

$$u_1(T,I) = \alpha,$$
$$u_1(D,I) = 2(1-\alpha),$$
$$u_1(I,I) = \alpha^2$$

und man erh?lt das folgende neue Spiel:

	T	D	I
T	1	-2	α
D	2	-1	$2(1-\alpha)$
I	α	$-2(1-\alpha)$	α^2

Dieses Spiel soll nun auf Nash-Gleichgewichte untersucht werden.

(D,D) ist Nash-Gleichgewicht im Ausgangsspiel. Also ist $u_1(D,D) = -1$ und f?r $\alpha > 1/2$ gilt:

$$e_1(I,D) = -2(1-\alpha) = -2 + 2\alpha > 1 - 2 = -1.$$

Folglich ist (D,D) f?r $\alpha > 1/2$ kein Nash-Gleichgewicht.

Auch (I,I) ist kein Nash-Gleichgewicht, da $u_1(I,I) = \alpha^2$ und $u_1(T,I) = \alpha > \alpha^2$ f?r $\alpha \in]0,1[$.

Weiter sind alle Strategienpaare (s_i, s_j), $i \neq j$, kein Nash-Gleichgewicht.

Damit folgt, dass es keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien gibt.

Man f?hrt also gemischte Strategien (p,q,r) ein, die sich als „Bev?lkerungsanteile" von Strategietypen T, D, I in einem Netzwerk interpretieren lassen. Es bleibt zu kl?ren, wie sich das System verh?lt.

Nash-Gleichgewichte werden jetzt in gemischten Strategien gesucht.

Dazu l?st man f?r $(p,q,r) \in \{(p,q,r) \in \mathbb{R}^3 : p+q+r = 1 \wedge p > 0, q > 0, r > 0\} := \Delta$ die Matrix-Gleichung:

$$A\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -1 & 2(1-\alpha) \\ \alpha & -2(1-\alpha) & \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^T A\sigma \\ e_2^T A\sigma \\ e_3^T A\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - 2q + \alpha r \\ 2p - q + w(1-\alpha)r \\ \alpha p - 2(1-\alpha)q + \alpha^2 r \end{pmatrix}.$$

Eine v?llig gemischte Strategie bedeutet $A\sigma = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$. Also k?nnen p, q, r durch Gleichsetzen der Nutzen $e_j^T A\sigma$ bestimmt werden.

Nach kurzer Rechnung erh?lt man dann:

$$p^* = \frac{7\alpha^2 - 5\alpha}{(1+\alpha)(3\alpha - 1)},$$
$$q^* = \frac{2(1-\alpha)(2\alpha - 1)}{(1+\alpha)(3\alpha - 1)},$$
$$r^* = \frac{1+\alpha}{(1+\alpha)(3\alpha - 1)}.$$

Diese Werte sind f?r $\alpha > 5/7$ in Ordnung, denn dann ist $7\alpha^2 - 5\alpha > 0$.

Im Grenzfall $\alpha = 1$ erh?lt man das Nash-Gleichgewicht $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = \sigma^*$.

Die Rechnungen motivieren folgenden

1.5.1 Satz. *F?r $\alpha > 5/7$ ist durch $\sigma = (p^*, q^*, r^*)$ ein Nash-Gleichgewicht gegeben. In Abh?ngigkeit von α ist f?r α nahe bei 1:*

- $e_1^T A\sigma$ *wachsend und* $e_1^T A\sigma$*=1 f?r* $\alpha = 1$
- p^* *monoton wachsend in* α
- q^*, r^* *monoton fallend in* α

$\sigma = (p^*, q^*, r^*)$ ist keine evolution?r stabile Strategie f?r α, die nahe bei 1 liegen.

Es ist zwar $\sigma^{*T} A\sigma^* = \frac{4(4\alpha^2-4\alpha+1)}{(\alpha+1)(3\alpha-1)}$ und damit $\sigma^T A\sigma = 1$ f?r $\alpha = 1$ (es gilt ebenso: $\sigma^{*T} A\sigma^* = 1$ f?r $\alpha = 5/13$, aber es wird ja $\alpha > 5/7$ angenommen), aber mit e_1 gilt:

$$e_1^T A\sigma = 1$$

f?r $\alpha = 1$. Damit σ^* eine evolution?r stabile Strategie ist, muss dann $\sigma^{*T} Ae_1 > e_1 Ae_1$ sein. Allerdings ist $e_1 Ae_1 = 1$ und man zeigt leicht, dass $\sigma^{*T} Ae_1 = 1$ f?r $\alpha = 1$ und $\sigma^{*T} Ae_1 < 1$ f?r $\alpha < 1$ ist.

Mithilfe der Replikatorgleichung l??t sich folgender Satz zeigen:

1.5.2 Satz. *Es existiert ein* α_0*, so dass f?r* $\alpha \geq \alpha_0$ *die gemischte Strategie* (p^*, q^*, r^*) *asymptotisch stabil ist.*