1 Lektion 7: Evolutorische Spieltheorie. Evolution?r stabile Strategien und Replikatordynamik als Beitrag aus der Biologie

Verfeinerungen vom Begriff Nash-Gleichgewicht

Erfahrung hat gezeigt, dass sich Spieler nicht immer rational verhalten, daher werden neue Gleichgewichtskonzepte vorgestellt.

Eine neue Auffassung von Spielen wird durch ein einfaches Beispiel mit zwei H?ndlertypen vorgestellt und motiviert, und diese neue Sichtweise wird anhand des Beispiels *Falke und Taube* vertieft.

Die *evolutorische Spieltheorie* liefert

- eine neue Interpretation zum Begriff des Spiels,
- viele neue Spiele,
- Anwendungen in Biologie, Sozialwissenschaften, Psychologie,
- eine Loslösung von dem Begriff der Rationalität als Voraussetzung, um zu einem Lösungskonzept zu kommen,
- weitere Verfeinerungen des Begriffs Nash-Gleichgewicht und
- eine ergänzende Interpretation zur Verwendung von gemischten Strategien.

Das zentrale Konzept der (elementaren) evolutorischen Spieltheorie ist der Begriff der *evolutionär stabilen Strategie*, der den Begriff des Nash-Gleichgewichts in symmetrischen 2-Personen-Spielen in Normalform mit endlich vielen Strategien verschärft. Ein allgemeiner Existenzsatz wird für den Fall von 2 Strategien bewiesen. Verschiedene Schwächen des Modells der so vorgestellten evolutorischen Spiele (wie z.B. diskrete Zeit, sehr grosse Population, jeweils nur ein Mutant, etc.) lassen es sinnvoll erscheinen, eine dynamische Version der evolutorischen Spiele zu formulieren, die zur *Replikatorgleichung* führt. Damit stehen der Spieltheorie drei weitere Gleichgewichtskonzepte zur Verfügung, nämlich die der dynamischen Systeme: *Dynamisches Gleichgewicht* oder *Fixpunkt*, *stabiles Gleichgewicht* und *asymptotisch stabiles Gleichgewicht*. Diese werden mit den bisher diskutieren Lösungskonzepten verglichen.

1.1 Evolution?r stabile Strategien

Vor der formaleren Darstellung wird das Thema mit folgendem (Führungs-)Beispiel motiviert:

Beispiel 1 (Händlerspiel) *Eine grosse Zahl von Händlern trifft (u.U.wiederholt) zufällig paarweise aufeinander. Es existieren zwei Händlertypen: A=aggressiv, V=vorsichtig. Das Basisspiel stellt sich in Normalform wie folgt dar:*

		Spieler 2	
		A	*V*
Spieler 1	*A*	$(0,0)$	$(3,1)$
	V	$(1,3)$	$(2,2)$

(A;V), (V;A) und $(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}V; \frac{1}{2}A, \frac{1}{2}V)$ *sind die Nash-Gleichgewichte des Basisspiels.*

Wir betrachten nun verschiedene Zusammensetzungen der Population und untersuchen jeweils, welche Strategie optimal ist.

1. Szenario: *Die gesamte Population besteht aus Händlern vom Typ A. Bei jedem Aufeinandertreffen erhalten beide Händler eine Auszahlung von 0. Wenn ein Hä ndler seinen Typ auf V umstellt, dann ist (bei hinreichend vielen Spielern) der H?ndler vom Typ V erfolgreicher als die Händler vom Typ A und er findet Nachahmer*[1] *Folge: Der Anteil der Händler vom Typ V an der Gesamtpopulation wächst, entsprechend sinkt der Anteil der Händler vom Typ A.*

2. Szenario: *Die gesamte Population besteht aus H?ndlern vom Typ V. Ein einzelner Mutant A ist erfolgreicher als die V, denn als einziger H?ndler vom Typ A erhält er bei jedem Aufeinandertreffen mit einem anderen H?ndler, der annahmegemäš vom Typ V ist, eine Auszahlung von 3 anstatt von 2. Folge: Der Anteil der Händler vom Typ A an der Gesamtpopulation wächst, entsprechend sinkt der Anteil der Händler vom Typ V.*

3. Szenario: *Es gibt gleich viele Händler vom Typ V und H?ndler vom Typ A. Ein Mutant vom Typ V hat Auszahlung* $0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 1 = 1,5$ *im Mittel, ein Mutant vom Typ A genauso:* $0,5 \cdot 3 + 0,3 \cdot 0 = 1,5$. *Ein typischer Vertreter der Population ist* $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}V$, *erreicht also im Mittel auch eine Auszahlung von* $1,5$. *Daher verä ndert sich an der Zusammensetzung der Population nichts: es liegt ein* Gleichgewicht *vor.*

Interpretation: Übertragen auf das Konzept der *Evolution* gilt: falls in einer gegebenen Population eine Mutation eine höhere Auszahlung erhält, so ist diese Mutation erfolgreich und wird nachgeahmt (*Replikation*). Erhält dagegen eine Mutation eine niedrigere Auszahlung, so wird sie selektiert (*Selektion*).

[1] Ist nur ein Händler vom Typ V, so erhält er eine Auszahlung von 1 bei jedem Aufeinandertreffen auf einen anderen Händler, denn dieser ist zwangsläufig vom Typ A. Zwar erhält der Händler vom Typ A bei einem Aufeinandertreffen mit V eine Auszahlung von 3, es soll aber gelten, dass die Population so groš ist, dass diese höhere Auszahlung so selten auftritt, dass er im Mittel bestimmt weniger als 1 erhält.

Evolution erhält dabei einen strategischen Aspekt, weil der Erfolg einer Mutation(sstrategie) von der Zusammensetzung der Population abhängt. [2]

Allgemein: Symmetrische 2-Personenspiele mit endlich vielen Strategien Sei die Anzahl der Strategien $n = 2$ und ein symmetrisches Spiel in Normalform gegeben:

		Spieler 2	
		s_1	s_2
Spieler 1	s_1	(a, a)	(b, c)
	s_2	(c, b)	(d, d)

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Symmetrisch hat dabei zwei Bedeutungen:

1. *Symmetrisch in der Auszahlung*, d.h.
$$u_1(s_i, s_j) = u_2(s_j, s_i), \tag{1}$$
f?r $i, j = 1, 2$ und
2. *Symmetrisch in der Strategie:* die Strategienräume stimmen überein, d.h. $S_1 = S_2$, und die Spieler können nicht entscheiden, ob sie Spieler 1 oder 2 sein wollen.

Da das Spiel symmetrisch ist, können wir die Normalform auch kürzer schreiben:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}$$

oder in Matrixform
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Das *Basisspiel* wird also gegeben durch eine reellwertige $n \times n$–Matrix $A := (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, wobei $n = |S_1|$ die Anzahl der jedem Spieler zur Verf?gung stehenden Strategien bezeichne. Der Eintrag a_{ij} gibt gerade die Auszahlung von Spieler 1 wider, wenn er die Strategie s_i, Spieler 2 Strategie s_j spielt: $a_{ij} = u_1(s_i, s_j)$ (wegen der Symmetrie gilt: $u_2(s_i, s_j) = a^T_{ij} = a_{ji}$. In gemischten Strategien σ, $\tau \in \Delta := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } 0 \leqslant x_j, \text{ f?r } 0 \leqslant j \leqslant n \text{ und } \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$ gilt f?r die Auszahlungen entsprechend:

$$u_1(\sigma, \tau) = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i a_{ij} \tau_j = \sigma^T A \tau = u_2(\tau, \sigma) \tag{3}$$

$$u_2(\sigma, \tau) = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i a_{ji} \tau_j = \sigma^T A^T \tau = \tau^T A \sigma. \tag{4}$$

[2] Diese Beobachtung stammt ursprünglich von **?**.

Bemerkung 1 (Existenz eines symmetrischen Nash-Gleichgewichts) *In einem symmetrischen 2-Personenspiel mit endlich vielen Strategien gibt es stets ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien, das* symmetrisch *ist:* $(\sigma, \sigma) \in \Delta^2$.

Beweis: Die Existenz eines Nash-Gleichgewichts folgt aus dem *Satz von Nash*. Sei (σ_1, σ_2) ein Nash-Gleichgewicht von Γ. Entweder (σ_1, σ_2) ist bereits symmetrisch, d.h. $\sigma_1 = \sigma_2$, dann fertig, oder $\sigma_1 \neq \sigma_2$, dann ist auch (σ_2, σ_1) Nash-Gleichgewicht von Γ, denn: $u_1(\sigma_2, \sigma_1) = u_2(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant u_2(\sigma_1, s_1) = u_1(s_1, \sigma_1)$, $\forall s_1 \in S_1 = S$ und $u_2(\sigma_2, \sigma_1) = u_1(\sigma_2, \sigma_1) \geqslant u_1(s_1, \sigma_2) = u_2(\sigma_2, s_1)$, $\forall s_1 \in S_2 = S$. Aus (σ_1, σ_2) und (σ_2, σ_1) lässt sich dann ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht konstruieren. ■

In jeder *Runde* $t = 0, 1, 2, \ldots$ werden Akteure einer *gro?en* Population zuf?llig gepaart, um das Basisspiel zu spielen.

Fitness bedeutet: Eine höhere Auszahlung führt zu einem grüßeren Anteil des erfolgreichen Typs an der Population in der nächsten Runde.

Dies nennt man *Evolutorisches Spiel*.

1. Interpretation: Jeder Akteur ist von einem festen Typ j, d.h. er spielt $s_j \in \{s_1, \ldots s_n\}$. Beim Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ liegt eine Populationsverteilung $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ mit $0 \leqslant \sigma_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^n \sigma_j = 1$ vor, die angibt, mit welcher relativen H?ufigkeit σ_j ein Akteur vom Typ j in der Population vorkommt. Die erwartete Auszahlung vom Typ j gegen die Population ist gegeben durch:

$$u_1(s_j, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k u_1(s_j, s_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \sigma_k = e_j^T A \sigma, \tag{5}$$

wobei e_j den j-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet

2. Interpretation: Es werden auch gemischte Strategien $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $0 \leqslant \tau_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\sum_{k=1}^n \tau_k = 1$, gespielt. Die erwartete Auszahlung vom Typ j gegen die Population ist gegeben durch: $u_1(\tau, \sigma) = \tau^T A \sigma$($\sigma$ durchschnittlicher Spieler der bestehenden Population, τ bezeichnet den Mutanten).

Doch was ist in dieser Situation ein Gleichgewicht oder stabile Situation?

1.2 Eindringen von Mutanten

Sei $\sigma := (\sigma_1, \ldots \sigma_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \leqslant \sigma_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^n \sigma_j = 1$, eine gegebene Ausgangsverteilung zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$, $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant \mu_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$ ein *Mutant*, d.h. eine gemischte Strategie. Diese f?hrt zu einer geringf?gigen ?nderung der Zusammensetzung der Population:

$$\sigma(\epsilon) := \epsilon \mu + (1 - \epsilon) \sigma \tag{6}$$

f?r $0 < \epsilon$, ϵ klein.

Ein Vertreter σ der urspr?nglichen Population hat die erwartete Auszahlung:

$$u_1(\sigma, \sigma(\epsilon)) = \sigma^T A\sigma(\epsilon) = \epsilon(\sigma^T A\mu) + (1-\epsilon)\sigma^T A\sigma, \tag{7}$$

wenn er bei seiner urspr?nglichen Strategie bleibt bzw.

$$u_1(\mu, \sigma(\epsilon)) = \mu^T A\sigma(\epsilon) = \epsilon(\mu^T A\mu) + (1-\epsilon)\mu^T A\sigma, \tag{8}$$

wenn er ebenfalls die Mutationsstrategie w?hlt.

Der *Mutant ist erfolgreich*, wenn:

$$\mu^T A\sigma(\epsilon) > \sigma^T A\sigma(\epsilon), \tag{9}$$

wenn die Strategie μ auch bei geringfügig anderer Population zu einer höheren Auszahlung fährt als σ.

Der *Mutant stirbt aus*, wenn dies nicht der Fall ist:

$$\mu^T A\sigma(\epsilon) < \sigma^T A\sigma(\epsilon) \tag{10}$$

für kleines $0 < \epsilon_0 < \epsilon$. Insbesondere ist ein Mutant so *gut* wie die urspr?ngliche Population.

Definition 1 (Evolutionär stabile Strategie) *Eine Strategie σ hei?t* evolution?r stabil *(oder* Gleichgewicht*), wenn für alle $\mu \in \Delta$ gilt:*

1. *$\sigma^T A\sigma > \mu^T A\sigma$,*
   (dann gilt (10) f?r $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$) oder
2. *$\sigma^T A\sigma = \mu^T A\sigma$ und $\mu \neq \sigma \Rightarrow \sigma^T A\mu > \mu^T A\mu$*
   (dann gilt (10) f?r alle ϵ).

Satz 1 *Eine evolutionär stabile Strategie σ liefert ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht (σ, σ) (in gemischten Strategien).*

Beweis: Zu zeigen ist: $u_1(\sigma, \sigma) \geqslant u_1(\mu, \sigma)$ f?r alle $\mu \in \Delta$. Das ist die Aussage von 1 bei $>$ oder von 2 bei $=$. ∎

Insbesondere gilt für symmetrische 2-Personenspiele:

Sei $A = (\{1, 2\}, (B, B), (u_i))$ ein symmetrisches Spiel, mit $u_1(a, b) = u_2(b, a) = u(a, b)$ (wie oben) für eine Funktion u. Eine *evolutionär stabile Strategie* von A heisst eine Strategie $b^* \in B$, so dass (b^*, b^*) ein Nash-Gleichgewicht ist von A ist und $u(b, b) \leq u(b^*, b)$ für jede beste Antwort $b \in B$ auf b^*, wobei $b \neq b^*$.

Satz 2 *Jedes strikte symmetrische Nash-Gleichgewicht (σ, σ) liefert eine evolution?r stabile Strategie.*

Beweis: Sei (σ, σ) ein striktes, symmetrisches Nash-Gleichgewicht. Dann lautet die Bedingung dafür, dass (σ, σ) ein striktes Nash-Gleichgewicht ist: $u_1(\sigma, \sigma) > u_1(\tau, \sigma)$, $\forall \tau \neq \sigma$. Die Behauptung folgt aus der Definition. ■

Folgendes Beispiel, zuerst analysiert von **?** illustriert das Konzept der evolutionär stabilen Strategie.

Beispiel 2 (Falke und Taube) *Sei das Falke und Taube Spiel (siehe ?) gegeben:*

		Spieler 2	
		F	*T*
Spieler 1	*F*	$\frac{V-C}{2}$	V
	T	*0*	$\frac{V}{2}$

wobei $V, C \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant V < C$ gelten sollen.

Seien $\sigma := (p, 1-p)$ eine Ausgangsverteilung der Population, $0 \leqslant p \leqslant 1$, $\mu := (m, 1-m)$ ein Mutant, $0 \leqslant m \leqslant 1$. Die Auszahlung des Mutanten ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} u_1(\mu, \sigma) = \mu^T A \sigma &= m\left(p\frac{V-C}{2} + (1-p)V\right) + (1-m)\left(p0 + (1-p)\frac{V}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(V(1-p) + m(V - pC)). \end{aligned} \tag{11}$$

Gegeben σ erhält man die beste Mutation durch Auffinden der Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} u_1(\mu, \sigma) &= \frac{1}{2}(V - p) = 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{V}{C}. \end{aligned} \tag{12}$$

Gemäß Annahme ist $p^* := \frac{V}{C} \in [0, 1)$.

Gegen $\sigma^* := \left(\frac{V}{C}, 1 - \frac{V}{C}\right)$ ergibt sich die erwartete Auszahlung eines Mutanten unabhängig von m:

$$\mu^T A \sigma^* = \frac{v}{2}(1 - \frac{v}{c}) = (\sigma^*)^T A \sigma^*, \tag{13}$$

somit erhält man

$$\sigma^{*T} A \mu - \mu^T A \mu \overset{(\sigma^* - \mu)^T A \sigma^* = 0}{=} (\sigma^* - \mu)^T A (\mu - \sigma^*) = \frac{c}{2}(p^* - m)^2 > 0$$

für $m \neq p^*$, d.h. $\sigma = \frac{V}{C}$ ist eine evolutionär stabile Strategie.

Anhand von einem konkreten Taube-Falke-Beispiel wird der Begriff von esS noch deutlicher:

Sei das Spiel wie folgt gegeben:

	F	T
F	$\frac{1}{2}(1-C), \frac{1}{2}(1-C)$	$0, 1$
T	$1, 0$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Man denke etwa an die Situation, wo es beim Aufeinandertreffen über eine Fläche oder auch Futter mit Wert=1 geht. Wie gehabt kann sich ein Spieler für eine Strategie T=Taube entscheiden oder für F=Falke. Der Ausgang des Aufeinandertreffens verschiedener Spezies ist in der oberen Matrix - konkretes Basisspiel für V=1 - beschrieben.

Sei B die Menge von allen gemischten Strategien über $\{T, F\}$. Falls $C > 1$, dann hat das Spiel ein einziges Nash-Gleichgewicht in der symmetrischen gemischten Strategie, in der jeder Spieler die Strategie (1- $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{C}$). Diese Strategie ist die einzige evolutionär stabile Strategie. (Insbesondere ist die Population, die nur aus Falken besteht, nicht evolutionär stabil.) Wenn $C < 1$ ist, dann hat das Spiel ein einziges Nash-Gleichgewicht in der gemischten Strategie, in der jeder Spieler die Strategie F spielt. Diese Strategie ist die einzige evolutionär stabile Strategie.

Allgemeiner gilt folgender Existenzsatz:

Satz 3 *Im Falle von 2 Strategien und $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ gibt es eine evolutionäre Strategie, wenn $a_{11} \neq a_{21}$ und $a_{12} \neq a_{22}$.*

Beweis: Fallunterscheidung:

1. $a_{11} > a_{21} \Rightarrow (1, 0)$ ist striktes Nash-Gleichgewicht$\Rightarrow$(Satz) $(1, 0)$ ist evolutionär stabile Strategie;

2. $a_{22} > a_{12} \Rightarrow (0, 1)$ ist striktes Nash-Gleichgewicht$\Rightarrow$(Satz) $(0, 1)$ ist evolutionär stabile Strategie;

3. $a_{11} < a_{21} \wedge a_{22} < a_{12} \Rightarrow \mu^T A\sigma = \sigma^T A\sigma$ und $p^* = \frac{a_{21}-a_{12}}{a_{11}-a_{21}+a_{22}-a_{12}}$ liefert evolutionär stabile Strategie.

■

Satz 4 *Jede evolutionär stabile Strategie ist isolierter Punkt in der Menge der symmetrischen Nash-Gleichgewichte.*

$n \times n$: $\mathcal{N}_{sym} \subset \Delta \times \Delta$. Aussage: Sei (σ_k) Folge evolutionärer Strategien und $\sigma_k \to \sigma^* \Rightarrow \sigma_k = \sigma^*$ für alle $k \geq k_0$.

Satz 5 *Die Menge der evolutionären Strategien ist endlich.*

Begr?ndung: Kompaktheit. $(\sigma^*, \sigma^*) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \subset \subset \subset N_{sym}$ wegen Satz 4 isoliert. $U_\varepsilon \cap \int \times \mathcal{S} = \{(\sigma^*, \sigma^*)\}$

Kritik an dem obigen Konzept:

- viele Spieler
- die Population ist monomorph
- Spieler unendlich oft am Spielen (sie treffen unendlich oft (paarweise) aufeinander) und erst dann Resultat
- Kein Erinnerungsvermögen
- Gemischte Strategien möglich
- immer *nur eine* Mutation
- diskrete Zeit $t \in \mathbb{N}$

Bei diesem Konzept kommt keine ??Dynamik auf. Aus mehreren Gründen wurde das Konzept der Replikatordynamik entwickelt, also zu einer kontinuierlichen Zeit übergegangen, insbesondere wegen oben gerade genannten.

Die Annahme diskreter Zeit soll im Folgenden aufgehoben werden.

1.3 Replikatordynamik

Was ist ein Replikator?

Ein Beispiel dafür wäre eine Strategie, ein Organismus, Überzeugung, soziale Norm, Technik oder auch Gene. Weiter wird die Ableitung hergeleitet, die für das Konzept charakteristisch ist.

Voraussetzungen: Sei $x(t) = (x_1(t) \ldots x_n(t))$ mit $0 \leqslant x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^{n} x_j(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, die Verteilung von Typen in einer gro?en Population zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet $x_j(t)$ den Anteil der Individuen vom Typ j an der Population zum Zeitpunkt t.

Die durchschnittliche Auszahlung eines Spielers ist gegeben durch:

$$x^T A x = \sum_{j=1}^{n} x_j (e_j^T A x). \tag{14}$$

Die Reproduktionsrate ist proportional zur *relativen Fitness*, d.h. $\frac{e_i^T A x}{x^T A x}$:

$$x_i(t + \mathrm{d}t) \sim x_i(t) \left(\frac{e_i^T A x}{x^T A x} \right) \tag{15}$$

Der ?bergang von $x_i(t + \mathrm{d}t) - x_i(t) = x_i(t) \frac{e_i^T A x - x^T A x}{x^T A x}$ als Differenzengleichung in diskreter Zeit f?hrt zur Differentialgleichung $\dot{x}_i = x_i \frac{e_i^T A x - x^T A x}{x^T A x}$, welche (bis auf Zeitskalierung) dieselben L?sungen hat wie

$$\dot{x}_i = x_i (e_i^T A x - x^T A x), \tag{16}$$

	F	T	A
F	(V-C)/2	V	(3V-C)/4
T	0	V/2-D	(V-2D)/2
A	(V-C)/4	(3V-2D)/2	V/2

Tabelle 1: konkretes Basisspiel

Das ist die sog. *Replikatorgleichung*, die auf **?** zur?ckgeht.

Die Replikatorgleichung 16 ist eine gew?hnliche Differentialgleichung vom Typ $\dot{x} = F(x)$ (autonomes, dynamisches System). Zu gegebenen Anfangswerten existiert eine eindeutige L?sung.

Ausblick in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen Vorausgesetzt sei ein System der Form $\dot{x} = F(x)$, $x(t_0) = x_0$ $(*)$.
x^* heisst *dynamisches Gleichgewicht*, wenn $F(x^*) = 0$. Dann: Stationäre Lösung: $x(t) = x^*$

Das dynamische Gleichgewicht x^* heisst *stabiles Gleichgewicht*, wenn zu jeder ε-Umgebung U eine δ-Umgebung V von x^* existiert, mit folgender Eigenschaft: Jede Lösung vom System (*) mit $x(t_0) = x_0 \in V$ bleibt in U für alle Zeiten $t \in [t_0, \infty[$.

Ein dynamisches Gleichgewicht heisst *asymptotisch stabil*, wenn ...

1.4 Weiterführende Literatur

Die grundlegende Arbeit zur evolution?ren Spieltheorie stammt von Maynard Smith. Die Idee der evolution?r stabilen Strategien wird zuerst in **?** dargestellt, **?** gibt eine gute Zusammenfassung. Bekannt ist auch **?**, wo auch Computerexperimente darstellt und insbesondere das Gefangenendilemma im Rahmen der evolution?ren Spieltheorie diskutiert werden. Eine online-Zusammenfassung gibt **?**.

Übungsaufgabe 7 Das Basisspiel sei durch folgende Tabelle gegeben:

Man zeige:

- Die asymptotisch stabilen Gleichgewichte sind die evolutionär stabilen Strategien
- Interpretatition, ggf. Varianten des erweiterten Falke-Taube-Problems (3×3)
- Für welche Werte von D ist die reine Strategie A eine evolutionär stabile Strategie?

- Und für welche V, C, D?
- Bestimme asymptotisch stabile Gleichgewichte