Lektion 6: Modellierung von Geschäftsausweitung und Preiskampf durch unendlich oft wiederholte Spiele: Präferenzen, Auszahlungsfunktionen, Strategien und Lösungskonzepte

Johannes Brumm, Benedikt Höfer, David Weikersdorfer

26. Juli 2004

Zusammenfassung

Im Folgenden werden wir von unendlich oft wiederholten Spielen ausgehen. Wie wir v.a. beim Gefangenendilemma gesehen haben, gibt es unzählige Motivationen, iterierte Spiele anzunehmen; eine wiederholte Begegnung zwischen verschiedenen Spielern gilt i.A. als realitätsnäher als ein einmaliges Zusammenkommen. Und warum wird das Spiel gleich unendlich oft gespielt? Das hängt damit zusammen, dass die genaue Anzahl der Runden von vornherein nicht festgelegt ist. – Im Folgenden werden wir auch die Form eines unendlich oft wiederholten Spiels präzisieren.

1 Ein bekanntes Dilemma

Eine inzwischen vermutlich wohl bekannte Gestalt des Gefangenendilemmas ist das Ölkartell. Kooperation bedeutet niedrige Ölförderung, d.h. hoher Ölpreis, und Defektion bedeutet hohe Ölförderung, also niedrigerer Ölpreis (aber evtl. höherer Gewinn).
Die Matrix sieht so aus:

$1\backslash 2$	D	K
D	$(2,2)$	$(10,0)$
K	$(0,10)$	$(7,7)$

Mehrfache Runden Der Diskontfaktor $\delta \in (0,1)$ beziffert die Bedeutung der Zukunft. Den Fall $\delta = 1$ hat auch seine Berechtigung, wir lassen ihn aber hier außer Acht (weil man dann beim Summieren mit der geometrischen Reihe Unendlichkeits-Probleme bekommt). Wir können δ auch in Abhängigkeit von einer Abzins-, Inflations- oder Verlustrate $r > 0$ schreiben: $\delta = \frac{1}{1+r}$.

Notation Wir bezeichnen mit s_i^t die Strategie des Spielers i zur Zeit $t \in \{0, 1, ...\}$. – Die pay off-Funktion notieren wir als $u_i((s_1)(s_2)) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i(s_1^t, s_2^t)$. Jetzt wollen wir verschiedene Strategien betrachten!

1. Fall Beide Spieler kooperieren, d.h. $s_i^t = K \ \forall i \ \forall t$. Es ergibt sich $u_i((K), (K)) = 7 + 7\delta + 7\delta^2 + ... = 7\frac{1}{1-\delta}$.

Trigger-Strategie Hierbei handelt es sich um die Strategie, die im Turnier von Axelrod als FRIEDMAN bekannt ist. Es handelt sich um die primitivste Strategie, die das Verhalten des anderen Spielers mit bedenkt. Sie beginnt kooperativ, aber die erste Defektion zahlt sie mit unerbittlicher Vergeltungssucht heim, d.h. von da an defektiert sie ständig. Also: $s_1^0 = K$; $s_1^{t+1} = K$, wenn $s_2^{t'} = K$ für $0 \leq t' \leq t$. Es gilt hingegen $s_1^{t+1} = D$, wenn $s_2^{t'} = D$ für ein $0 \leq t' \leq t$. Natürlich sind die Rollen von 1 und 2 hierbei vertauschbar.

2. Fall 2 weicht ab von der Kooperationsschiene, d.h. $\hat{s}_2^t = K$ für $0 \leq t \leq m-1$, aber $\hat{s}_2^m = D$. Damit sich das Abweichen rentiert, hat zu gelten: $u_2(s_1, \hat{s}_2) = \sum_{j=0}^{m-1} 7\delta^j + 10\delta^m + \sum_{j=m+1}^{\infty} 2\delta^j \geq 7\frac{1}{1-\delta}$. Durch Umformen erhält man $\delta \leq \frac{3}{8}$, d.h. wenn die Zukunft genügend wichtig ist ($\delta > \frac{3}{8}$), lohnt sich ein Abweichen von der Trigger-Strategie nicht.

Satz 1 Es seien die Voraussetzungen des unendlich oft iterierten Gefangenendilemmas erfüllt. Ferner gelte für den Diskontfaktor $\delta > \frac{3}{8}$. Dann ist die (beidseitige) Trigger-Strategie ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht.

Satz 2 Sei Γ ein Spiel in Normalform mit genau einem Nash-Gleichgewicht s^N in reinen Strategien. Dann hat das endlich oft iterierte Spiel (mit Γ als Basisspiel) genau ein Nash-Gleichgewicht, und zwar immer s^N.

Beweis Rückwärtsinduktion: Da durch das letzte Spiel keine Zukunft beeinflusst wird, ist s^N das einzige Nash-Gleichgewicht in dieser Runde. Damit stehen die Strategien in der letzten Runde aber schon fest. Nun kann dieselbe Überlegung auch für das vorletzte Spiel durchgeführt werden usw.

2 Unendlich oft wiederholte Spiele aus formaler Sicht

Definition Gegeben sei $\Gamma(n, S, u)$ ein Spiel in Normalform mit n Spielern $\{1, ..., n\}$, $S = S_1 \times ... \times S_n$, $u = (u_1, ..., u_n) : S \to \mathbb{R}^n$ (Basisspiel, stage game, base game). – Das unendlich iterierte Spiel (zu Γ) hat die „Form“

$$H = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k \cup S^{\mathbb{N}}.$$

H ist die Menge der „Historien“ des Spiels: $\emptyset$ ist die leere Historie, $\bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$ sind die endlichen Historien, und $S^{\mathbb{N}}$ ist die unendliche Geschichte.

Beginn bei $\emptyset$: Jeder $j \in \underline{n}$ wählt $s_j^0 \in S_j$, dh. $s^0 = (s_1^0, ..., s_n^0) \in S$

Weiter bei $s^0 \in S^1$:Jeder $j \in \underline{n}$ wählt $s_j^1 \in S_j$, dh. $s^1 = (s_1^1, ..., s_n^1) \in S$, $(s^0, s^1) \in S^2 = S \times S$.

...

$Z := S^{\mathbb{N}}$, $E = H \backslash Z$.

Spielverlauf: $h \in E$: $h = (s^0, ..., s^{m-1}) \in S^m$ und jeder Spieler $j \in n$ wählt $s_j^m \in S_j : s^m = (s_1^m, ..., s_n^m)$ mit: Ergebnis der Runde Nr. m+1 : $h' = (s^0, \ldots, s^m)$

Spiel? Gehalt: Präferenzen auf Z: Jeder Spieler $j \in n$ sollte präferieren: $z, z' \in Z : z \geq_j z'$

Hier bekannt: $z = (z^t) \in S^{\mathbb{N}}$

$\delta_1, \delta_s \in]0, 1[$: $z \geq z' \iff \sum_{t=0}^{\infty} u_j(z^t)\delta_j^t \geq \sum_{t=0}^{\infty} u_j(z'^t)\delta_j^t$

$\liminf \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{T+1}(u_j(z^t) - u_j(z'^t))$

Strategie: $s_j : E \to S_j \; s_j(u) \in S_j$

Strategieprofiel: $s = (s_1, \ldots, s_n) : E \to S$

$s(h) \in S$

$S^m \ni h \mapsto (h, s) \in S^{m+1}$

Def: Dominanz, Nash-GG, beste Antwort

3 Folk-Theorem und Bertrand-Spiel

Satz 3 (Folk-Theorem) Zu einem endlichen Spiel in Normalform existieren „beliebig viele“Nash-Gleichgewichte im zugehörigen unendlichen Spiel.

Interpretation Bei unbeschränktem Zeithorizont kann beinahe jede individuell rationale Strategie als Nash-Gleichgewicht durchgesetzt werden, d.h. es bereitet keine Schwierigkeiten mehr, Kooperation zu erklären - im

Gegenteil: Nahezu jedes Ergebnis lässt sich als Gleichgewichtverhalten begründen. – Weil die Urheberschaft dieses seit fast 50 Jahren bekannten Ergebnisses nicht geklärt ist, spricht man vom „folk theorem“.

Generisch Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $K \neq \emptyset$. Zu $k \in K$ gibt es dann ein Nash-GLeichgewicht mit k als Ergebnis.

Beispiel BERTRAND-Oligopol (Preiskampf); Ergänzung zu COURNOT-STACKELBERG.

- zwei Spieler $1, 2$
- Kosten cs_i, s_i verkaufte Produktion
- $N(p)$ Nachfrage zum Preis $p \geq c$, $N'(p) < 0$; eine (fast zu) simple Möglichkeit ist $N(p) = M - p$ mit $M =$ maximale Nachfrage
- $u_i(p_1, p_2) = (p_i - c)d_i(p_1, p_2)$ mit

$$d_1(p_1, p_2) = \begin{cases} N(p_1) & \text{für} \quad p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}N(p_1) & \text{für} \quad p_1 = p_2 \\ 0 & \text{für} \quad p_1 > p_2 \end{cases}$$

Satz 4 $p_1^* = p_2^* = c$ ist das einzige Nash-Gleichgewicht vom BERTRAND-Duopol.

Beweis $(p_1, p_2) \neq (c, c)$, d.h. wir müssen verschiedene Fälle unterscheiden:

- $p_1 > p_2 > c$: $p_1 \to p' \in]c, p_2[$, $u_1(p_1, p_2) = 0$, $u_i(p_1', p_2) = (p_1' - c)N(p_1') > 0$
- etc. (4-5 Fälle ergänzen!)

Satz 5 Sei M der Monopolpreis. Zu $p \in [c, M]$ existiert die Triggerstrategie als Nash-Gleichgewicht des unendlich oft wiederholten BERTRAND-Spiels, wenn $\delta > \frac{1}{2}$. Dabei ist M so gewählt, dass $g(p) = (p - c)N(p)$, $p \in [c, M]$ steigend (mit maximalem M).

Beweis $p_1^0 = p$ und
$p_1^{t+1} = p$ wenn $p_2^{t'} \geq p$ für $0 \leq t' \leq t$
$p_1^{t+1} = c$ wenn $p_2^{t'} \geq p$ für $0 \leq t' \leq t$
Analog p_2.
Bew: Annahme : 2 weicht ab mit $\hat{p_2} = (\hat{p_2}^t)_{t \in \mathbb{N}}$

$\hat{p_2}^t = p$ für $0 \leq t \leq m-1$ und $\hat{p_2}^m = p - \epsilon, \epsilon > 0$
$u_2(p_1, p_2) = 1/2\, N(p)\,(p-c)(1+\delta+\ldots+\delta^n\ldots) = \frac{g(p)}{2(1-\delta)}$
$u_2(p_1, \hat{p_2}) = 1/2\, N(p)\,(p-c)(1+\delta+\ldots+\delta^{m-1}) + \delta^m g(p-\epsilon) + 0$
$u_2(p_1, p_2) > u_2(p_1, \hat{p_2}) \Longleftarrow \delta > \frac{1}{2}$

Satz 6 Sei die Situation von Satz 5 gegeben, mit der einzigen Ausnahme, dass nicht 2, sondern allgemein n Firmen beteiligt sind. Dann existiert die Trigger-Strategie als Nash-Gleichgewicht des unendlich oft wiederholten BERTRAND-Spiels, wenn $\delta > 1 - \frac{1}{n}$. – Je mehr Firmen konkurrieren, desto wichtiger muss also die Zukunft eingeschätzt werden.

Beweis Übungsaufgabe.

Satz 7 Unter der Annahme, dass die Triggerstrategie erst nach k Runden wirksam werden kann ($k \neq 0$), gilt für den Diskontfaktor $\delta > \sqrt[k+1]{1 - \frac{1}{n}}$.

Beweis Übungsaufgabe.