Vorlesung Spieltheorie

Inhaltsverzeichnis

Lektion 5: Verhandlungsspiele nach Rubinstein und teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte zu Spielen in extensiver Form

1 Vorbemerkung und Verhandlungsspiel

Im Laufe der Vorlesung ist uns schon mehrfach der Begriff "Nash-Gleichgewicht" als Lösung eines Spiels begegnet. Dieser führt aber nicht immer zum gewünschten Ergebnis und sollte deswegen noch verfeinert werden. Eine Variante und Verschärfung des Lösungskonzepts "Nash-Gleichgewicht" ist der Begriff des **"teilspielperfekten Nash-Gleichgewichts"**. Mit Hilfe dieses Begriffs können nicht plausible Nash-Gleichgewichte (z.B. "unglaubwürdige Drohung" im Affenspiel vgl. Lektion 2) ausgeschlossen werden.

1.1 Verhandlungsspiel:

$X \subset \mathbb{R}^n$ sei ein kompakter und konvexer Strategieraum. Spieler 1 und 2 verhandeln, dass $x \in X$ beschlossen wird. Ein Spieler schlägt seine Wahl vor, der andere Spieler kann nun annehmen, dann ist das Spiel beendet, oder ablehnen, dann kann er einen Gegenvorschlag machen. Das Spiel endet entweder mit einem definitiv von beiden Seiten akzeptierten Vorschlag $x \in X$, oder es wird unendlich oft fortgesetzt. Im zweiten Fall gilt die Verhandlung als gescheitert, das Ergebnis wird schlechter bewertet ("Präferenz!") als jede Lösung $x \in X$.
Wir behandeln nur den Spezialfall: $X = [0, 1]$, wobei x bedeutet: Spieler 1 erhält x und Spieler 2 erhält 1-x.

2 Einführung des Begriffs "teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht"

2.1 Definition: (Informationsmenge)

Gegeben sei ein Spiel in extensiver Form (siehe hierzu Lektion 3 oder Wikiludia), wobei keine vollkommene Information vorliegen muss. Eine Informationsmenge (Informationsbezirk) ist eine Menge von Entscheidungsknoten mit folgenden Eigenschaften:

- Einer der Spieler ist an jedem Knoten der Informationsmenge am Zug.
- Wenn das Spiel einen der Knoten innerhalb der Informationsmenge erreicht hat und mehr als ein Knoten in der Informationsmenge ist, weiß dieser Spieler nicht, an welchem Knoten er sich befindet.

Befindet sich in einer Informationsmenge nur ein Entscheidungsknoten, so spricht man von einem Singleton. Sind alle Informationsmengen jeweils einelementig, so liegt vollkommene Information vor.

2.2 Definition: (Teilspiel)

Ein Teilspiel eines Spieles in extensiver Form ist ein Spiel $B_x(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

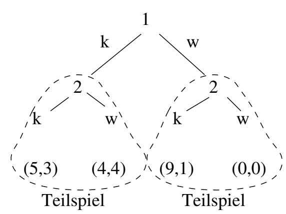
- Das Teilspiel beginnt in einem Entscheidungsknoten x, der ein Singleton ist.
- Das Teilspiel umfasst alle Kanten, Entscheidungs- und Endknoten, die von x aus in positiver Richtung erreicht werden können.

- Das Teilspiel darf keinen Informationsbezirk durchschneiden.
  (dh. für jeden Informationsbezirk I gilt: $I \cap K(x) = \emptyset$ oder $I \subset K(x)$, wobei K(x) die Menge der Knoten von $B_x(x)$ bezeichnet.)

2.3 Beispiel: Affenspiel

Dieses Beispiel ist bereits aus Lektion 2 bekannt. Großer Affe (Spieler 1) und kleiner Affe (Spieler 2) haben jeweils die Wahl zwischen den Strategien klettern (k) und warten (w), wobei Spieler 1 als erster ziehen darf.

Spielbaum:



Nash GG:
(w,w.k) "vernünftiges" Nash-Gleichgewicht
(w,k.k) nicht plausibel
(k,w.w) unglaubwürdige Drohung

Beim Betrachten der beiden Teilspiele sieht man, dass im linken Teilspiel w und im rechten Teilspiel k ein Nashgleichgewicht ist.
Bei (k,w.w) droht der kleine Affe, auf keinen Fall zu klettern, obwohl er damit ganz leer ausgehen würde. Daher nennt man diese Situation "Unglaubwürdige Drohung" (vgl. Lektion 2). Man sieht, dass die Restriktion des Strategieprofils (k,w.w) im rechten Teilspiel kein Nash-Gleichgewicht ist, da der Nutzen für Spieler 2 bei der Strategie k gleich 1 und bei der Strategie w gleich 0 ist (1>0).
Auch (w,k.k) ist nicht plausibel, da der kleine Affe selbst dann klettern würde, wenn der große Affe bereits klettert. Für den kleinen Affen bedeutet dies eine Verringerung seines Nutzens (vgl. Lektion 2). Die Restriktion von (w,k.k) auf das linke Teilspiel ist kein Nash-Gleichgewicht.

Ergebnis:
Das einzige teilspielperfekte Nash-Gleichgewicht ist (w,w.k). Mit Hilfe des Begriffs "teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht" (Definition siehe unten) kann man also die nicht plausiblen Nash-Gleichgewichte ausschliessen.

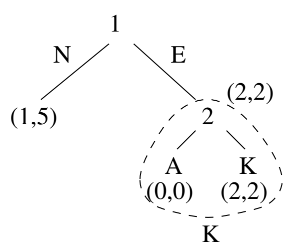
2.4 Definition: (Teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht)

Ein Strategieprofil ist ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht, wenn die Restriktion dieses Profils auf jedes Teilspiel ein Nash-Gleichgewicht ist.

3 Beispiele zu teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht

3.1 Beispiel: Kaufhauskettenspiel

Dieses Spiel ist eine vereinfachte Form des chain store game. Hierbei geht es um einen Monopolisten (Spieler 2) der sich auf einen Konkurrenten (Spieler 1), der in den Markt mit dem selben Produkt eintreten will, einstellen muss. Spieler 1 überlegt, ob er in den Markt des Monopolisten eintreten soll und hat die Wahl zwischen den Strategien Eintritt (E) und Nichteintritt (N) in den Markt. Der Monopolist kann entweder Aggressiv (A) oder Kooperativ (K) reagieren.
Dies führt zu folgenden Spielbaum:



Nash GG:
(E,K) teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht
(N,A) unglaubwürdige Drohung

Dieses Spiel führt zur folgenden Entscheidungsmatrix :

Sp.1\Sp.2	A	K
N	**(1,5)**	(1,5)
E	(0,0)	**(2,2)**

In der Entscheidungsmatrix sieht man, dass zwei Nash-Gleichgewichte existieren:

- (E,K) ist ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht, da die Strategie K im Teilspiel für Spieler 2 ein Nash-Gleichgewicht darstellt.
- (N,A) ist zwar ein Nash-Gleichgewicht, jedoch kein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht, da im Falle eines Eintritts ein aggressives Vorgehen eine Verringerung des Nutzens von Spieler 2 bedeuten würde. Dieses Nash-Gleichgewicht entspricht also einer unglaubwürdigen Drohung.

Im eingezeichneten Teilspiel, also wenn Strategie (E) wirklich eintritt, wird Spieler 2 Strategie (K) wählen, da diese ein Nash-Gleichgewicht ist.

Das Kaufhauskettenspiel, auch Kaufhauskettenparadoxon genannt, beschränkt sich natürlich nicht nur auf 2 Spieler und ist deshalb in der Realität viel komplexer . (Es wird Kaufhauskettenparadoxon genannt, da in der Realität häufig eine aggressive Strategie gewählt wird, obwohl die kooperative Strategie meistens sinnvoller wäre.)

3.2 Satz

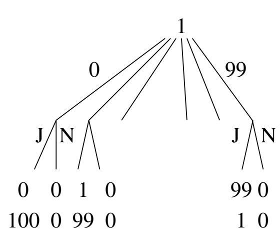
Rückwärtsinduktion nach **Satz von Zermelo** (Lektion 3) liefert bei einem Spiel in endlicher, extensiver Form mit vollständiger Information ein teilspielperfektes Nashgleichgewicht, wenn Größenvergleiche in Teilspielen immer zu strikten Entscheidungen führen.

3.3 Beispiel: Variante des Ultimatumspiels

Spieler 1 bietet $s_1 \in \{1, \ldots, 99\}$an, Spieler 2 hat nun 2 Strategien:

- falls Spieler 2 akzeptiert (Strategie J) führt dies zur Auszahlung (s_1, s_2) mit $s_2 = 100 - s_1$.
- falls Spieler 2 ablehnt (Strategie N) führt dies zur Auszahlung $(s_1, s_2) = (0, 0)$.

  Spielbaum:

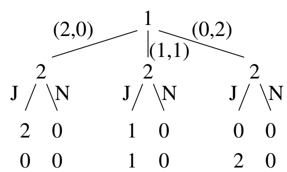


Nash GG:
Einziges teilspielperfektes NashGG ist $1 \mapsto 99,\ 2 \mapsto J$

Spieler 1 hat 100 Strategien, Spieler 2 hingegen 2^{100}. In diesem Beispiel existieren viele Nash-Gleichgewichte. Das Nash-Gleichgewicht bei $s_1^* = 99$ und $s_2 = J$ ist teilspielperfekt, da in allen 100 Teilspielen die Strategie J für Spieler 2 ein Nash-Gleichgewicht ist.

3.4 Beispiel: Allocation (Zuweisungsspiel)

2 identische und nichtteilbare Objekte sollen auf 2 Spieler verteilt werden. Spieler 1 kann die Vorschläge (2,0), (1,1) und (0,2) machen (Ultimatum auf 3 Möglichkeiten reduziert). Spieler 2 hat die Wahl zwischen den Strategien Annehmen (J) oder Ablehnen (N).



Nash GG:

es gibt 9 Nash-Gleichgewichte.

$((2,0), J.\beta.\gamma)$ ist Nash-Gleichgewicht, mit $\beta, \gamma \in \{J, N\}$.

$((2,0), J.J.J)$ & $((1,1), N.J.J)$ sind teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte!

$((1,1), NJN)$, $((0,2)NNJ)$, $((2,0), NNN)$ & $((2,0), NNJ)$ sind Nash-Gleichgewichte.

$((2,0), N.J.J)$ ist in allen Teilspielen perfekt, aber kein Nash-Gleichgewicht

Spieler 1 hat 3 Strategien und Spieler 2 hat 8 Strategien $\rightarrow$ 24 Paare, also insgesamt 24 Strategien.
Die oben genannten Nash-Gleichgewichte kann man aus folgender Entscheidungsmatrix ablesen:

Sp.1\Sp.2	JJJ	JJN	JNJ	NJJ	JNN	NNJ	NJN	NNN
(2,0)	2,0	2,0	2,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,0
(1,1)	1,1	1,1	0,0	1,1	0,0	0,0	1,1	0,0
(0,2)	0,2	0,0	0,2	0,2	0,0	0,2	0,0	0,0

Überprüfung von Nash-Gleichgewicht:
$u_1((2,0), J.\beta.\gamma) = 2 \geq u_1(*, J.\beta.\gamma)$
$u_2((2,0), J.\beta.\gamma) = 0 \geq u_2((2,0), *) = 0$

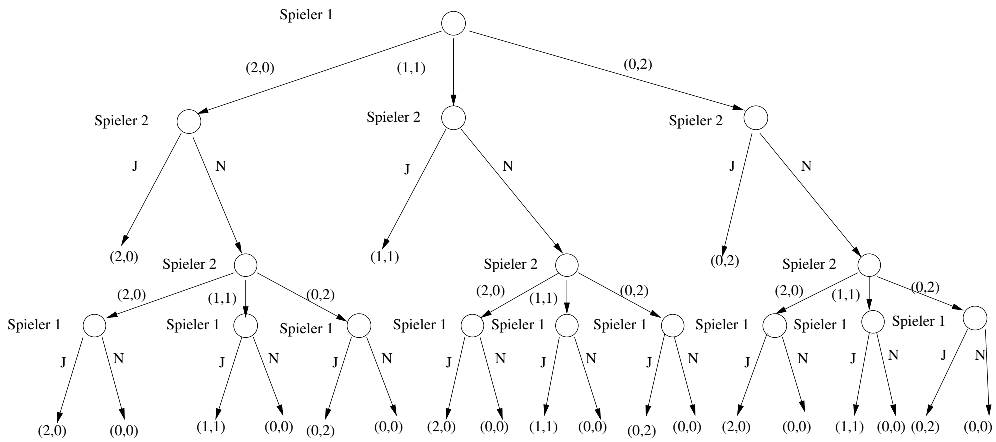
Ergebnis:

Betrachtet man nun die Teilspiele sieht man, dass im linken Teilspiel die Strategien J und N Nash-Gleichgewichte sind, im mittleren und rechten Teilspiel hingegen nur die Strategie J zu einem Nash-Gleichgewicht führt. Obwohl wir neun verschiedene Nash-Gleichgewichte haben, erkennt man deshalb, dass nur $((2,0), J.J.J)$ und $((1,1), N.J.J)$ teilspielperfekt sind. Die Nash-Gleichgewichte ((2,0), JJN, JNJ, JNN) sind nicht teilspielperfekt und auch im echten Leben unrealistisch, da der zweite Spieler ein für ihn schlechtes Ergebnis akzeptieren und/oder ein für ihn nützliches ablehnen würde.

3.5 Allocation mit Wiederholung

Allocation mit Wiederholung ist eine Variante des bereits oben besprochenen Zuweisungsspiels.
Das Ausgangsmodell wird dahin gehend modifiziert, dass bei Ablehnung durch Spieler 2 das Spiel nicht beendet ist, sondern jetzt Spieler 2 die selben Vorschläge

machen kann, wie Spieler 1 in der Runde zuvor und Spieler 1 mit Zustimmung oder Ablehnung reagieren kann. Dies kann man prinzipiell unendlich oft durchspielen.



Die Untersuchung auf Nash-Gleichgewichte und Teilspielperfektheit war Teil einer Übungsaufgabe und würde den Rahmen dieser Zusammenfassung sprengen.

4 Das Rubinstein (Stahl)-Modell

4.1 Rubinstein (Stahl)-Modell:

Wir betrachten einen Fall des Verhandlungsspiels mit 2 Spielern und $X = [0, 1]$. X wird durch (gegebenenfalls ∞ viele) wiederholte Angebote geteilt.
Stufe (bzw. Runde) $= t \in \mathbb{N}_0$.

- t = 0:
  Das Spiel (bzw. die Verhandlung) beginnt in der 0-ten Runde mit dem Angebot $x \in X$ von Spieler 1. Spieler 2 hat nun 2 Strategien:
  Er akzeptiert (J) mit der Wirkung, dass das Spiel mit der Auszahlung $(x, 1 - x)$ zuende ist oder lehnt ab (N) mit der Wirkung, dass das Spiel in die nächste Runde geht.

- t = 1:
  Spieler 2 macht nun das Angebot $y \in X$. Spieler 1 wiederum hat jetzt die Strategien Annehmen (J) oder Ablehnen (N). Strategie (J) führt zu der Auszahlung $(\delta_1 y, \delta_2(1 - y))$ mit $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1]$ (Diskontierungsfaktor), Strategie (N) bringt das Spiel wieder eine Runde weiter.

- t = 2:
  Spieler 1 kommt erneut zum Zug und kann sein Angebot $z \in X$ kundge-

ben. Akzeptiert Spieler 2 nun gibt es die Auszahlung $(\delta_1^2 z, \delta_2^2(1-z))$, bei Ablehnen erreicht das Spiel die nächste Stufe.

.

.

.

- t = 2k, $k \in \mathbb{N}$:
  Bei gerader Rundenzahl ist Spieler 1 am Zug und kann ein Angebot $x' \in X$ vorschlagen. Akzeptiert Spieler 2 gibt es die Auszahlung $(\delta_1^{2k} x', \delta_2^{2k}(1-x'))$, sonst verlängert sich das Spiel um eine weitere Runde.
- t = 2k+1, $k \in \mathbb{N}$:
  Bei ungerader Rundenzahl ist Spieler 2 am Zug und kann ein Angebot $x'' \in X$ vorschlagen. Akzeptiert Spieler 1 gibt es die Auszahlung $(\delta_1^{2k+1} x'', \delta_2^{2k+1}(1-x''))$, sonst verlängert sich das Spiel um eine weitere Runde.

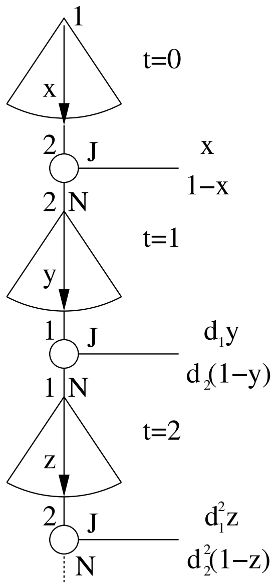
  .

  .

  .
- $t \to \infty$:
  In diesem Fall beträgt die Auszahlung also $(0,0)$ und die Verhandlung ist als gescheitert anzusehen.

Ergebnisbewertung:

Vorschlag x in Runde t mit $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{N}_0$ oder ∞ (∞ , falls sich die Spieler nicht einigen können)
Bei terminalen Knoten kommt es zu den Auszahlungen:
$u_1(x,t) = \delta_1^t x$
$u_2(x,t) = \delta_2^t(1-x)$
$\lim(t \to \infty)\ u_i(x,t) = 0$
Die Spieler sollten daher eine schnelle Einigung bevorzugen, da die Diskontierungsfaktoren δ_1, δ_2 den Nutzen jede Runde verringern.



Nash-GG:
Zu $x^* \in [0,1]$ ex. Nash-Gleichgewicht mit Ergebnis x^*
1 schlägt immer x^* vor,
2 schlägt immer x^* vor.
1 akzeptiert, wenn $x \geq x^*$, 2 akzeptiert, wenn $x \leq x^*$

Definition:
Eine Strategie σ für Spieler 1 ist gegeben durch
$\sigma = (\sigma_t)_{t \in N}$
$\sigma_0 (= x) \in [0,1]$
$\sigma_1 : [0,1]^2 \rightarrow \{J, N\}$
$\sigma_{2n} : [0,1]^{2n} \rightarrow [0,1]$
$\sigma_{2n+1} : [0,1]^{2n+1} \rightarrow \{J, N\}$

Eine Strategie τ für Spieler 2 ist gegeben durch
$\tau = (\tau_t)_{t \in N}$
$\tau_0 : [0,1] \rightarrow \{J, N\}$
$\tau_{2n} : [0,1]^{2n+1} \rightarrow \{J, N\}$
$\tau_{2n+1} : [0,1]^{2n} \rightarrow [0,1]$

4.2 Satz: (Existenz von Nash-Gleichgewicht)

Zu $x^* \in [0,1]$ existiert ein Nash-Gleichgewicht mit Ergebnis x^*in Runde t $= 0$.
Unter den Bedingungen

- $\sigma_{2n} : [0,1]^{2n} \rightarrow x^*$, d.h. 1 schlägt immer x^* vor,
- $\tau_{2n+1} : [0,1]^{2n} \rightarrow x^*$, d.h. 2 schlägt immer x^* vor.
- $\sigma_{2n+1}(x) = \{ \frac{J \; x \geq x^*}{N \; x < x^*}$, d.h. 1 akzeptiert $x \geq x^*$

- $\tau_{2n}(x) = \{\frac{J\ x \leq x^*}{N\ x > x^*}$,d.h. 2 akzeptiert $x \leq x^*$

Beweis: Überprüfung auf Nash-Gleichgewicht

Für Spieler 1 ist diese Strategie die beste, denn:

- Schlägt er ein $y^* > x^*$ vor, wird dieses nicht angenommen, und man einigt sich erst eine Runde später auf x^*. Dieses wird "abgezinst" und ist somit eine schlechtere Lösung.
- Schlägt er ein $y^* < x^*$ vor, ist dies eine schlechtere Lösung für ihn.
- Vergrößert er seinen Akzeptanzbereich, ändert dies nichts am Ergebnis.
- Verkleinert er seinen Akzeptanzbereich, einigen sich die Spieler nie.

Für Spieler 2 analog.

$\Rightarrow$Diese Lösung ist ein Nash-Gleichgewicht.

Überprüfung des Nash-Gleichgewichts auf Teilspielperfektheit:

Voraussetzungen/Strategien wie oben.

Wir betrachten den Spieler 2. Dieser überlegt sich seine Strategie für den Fall, dass Spieler 1 den Vorschlag $x = x^* + \varepsilon$ macht mit $\varepsilon > 0$ (klein) und $x^* < 1$. Es geht also um das Teispiel, welches bei $x = x^* + \varepsilon$ beginnt.
Die Nash-Strategie erfordert:
$\tau_0(x) = \{J \leftarrow (x \leq x^*), N \leftarrow (x > x^*)\}$ bei dem Vorschlag $x = x^* + \varepsilon$ müsste sich Spieler 2 also für die Strategie N entscheiden.
Wenn ε klein, dafür aber der Abzinsungsfaktor δ relativ groß ist (d.h. $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1]$ klein) , wäre es für Spieler 2 eine bessere Strategie, diesen Vorschlag zu akzeptieren, falls gilt:
$1 - (x^* + \varepsilon) > \delta_2(1 - x^*)$ (zweite Runde des Teilspiels kein Optimum)
$\Rightarrow$Bessere Strategie:
$\tau_0(x) = \{J \leftarrow (x \leq x^* + \varepsilon), N \leftarrow (x > x^* + \varepsilon)\}$
Dies widerspricht allerdings der oberen Strategie, diese ist also nicht in jedem Teilspiel ein Nash-Gleichgewicht. Somit kann diese Strategie kein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht sein.

4.3 Satz: (Rubinstein)

In dem beschriebenen Verhandlungsspiel gibt es genau ein eindeutiges teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht mit den folgenden Strategien:

- $\sigma_{2n} : [0,1]^{2n} \rightarrow x^*$, d.h. 1 schlägt immer x^* vor,
- $\tau_{2n+1} : [0,1]^{2n} \rightarrow y^*$, d.h. 2 schlägt immer y^* vor.
- $\sigma_{2n+1}(x) = \{\frac{J\ x \geq y^*}{N\ x < y^*}$, d.h. 1 akzeptiert $x \geq y^*$
- $\tau_{2n}(x) = \{\frac{J\ x \leq x^*}{N\ x > x^*}$, d.h. 2 akzeptiert $x \leq x^*$

, wobei $x^* > y^*$ mit $x^* = \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}$, $y^* = \delta_1(\frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2})$ und $\delta_1, \delta_2 \in (0,1]$ (Diskontierungsfaktor).
Falls $\delta = \delta_1 = \delta_2$ dann gilt $x^* = \frac{1}{1+\delta}$, $y^* = \frac{\delta}{1+\delta}$