LMU München - SS04 - Spieltheorie

Studenten des Kurses, Prof. Schottenloher

7. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

4 Erweiterung des Strategiekonzepts: Gemischte Strategien, beste Antwort und der Existenzsatz von Nash. Varianten des Lösungskonzepts bei Spielen in Normalform

4.1 Vorwort

In bisherigen Überlegungen haben wir immer in Spielsituationen Nash-Gleich- gewichte in reinen Strategien (eine bestimmte Handlung wird mit Sicherheit gewählt) betrachtet. Falls nun eine Spielsituation keine Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien besitz, z.B. wenn einer der Spieler das Zusammenfallen von Aktionen vorzieht während der andere Spieler dieses zu vermeiden versucht (vergleiche Beispiel 2.1 und 2.1.1), dann existiert immer, wie später folgt, ein Gleichgewicht in gemischten Strategien (Handlung wird zufällig gewählt). Die Wahl, sich an ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien zu halten, kann sich vor allem in Spielen die öfters wiederholt werden im Gewinn bzw. Verlust der Spieler bemerkbar machen (vergleiche Beipsiel 2.1.2).
Betrachtet man eine Spielsituation nur in reinen Strategien, ist die Beurteilung der Plausibilität ein weiteres Problem. Wir hatten bis jetzt immer angenommen, dass sich jeder Spieler i auf genau eine Strategie $s_i \in S_i$ festlegt. Das ist nicht immer der Fall: z.B. bei einer Spielsituation mit folgender Auszahlungsmatrix:

	Kopf	Zahl
Kopf	1 , -1	-1 , 1
Zahl	-1 , 1	1 , -1

Wenn der Spieler 1 von der Annahme ausgeht, dass Spieler 2 *Kopf* wählen würde, stellt sich die Frage, ob er auch *Kopf* spielen sollte. Wenn er aber *Kopf* spielt, ist es für den Spieler 2 vorteilhafter eine *Zahl* zu wählen. Praktisch macht sich die ungenaue Festlegung auf eine reine Strategie, bei mehrmaligen Durchlaufen desselben Spiels bemerkbar. Bei immer weiter fortschreitendem erneuten Spieldurchlauf kann sich die Strategie des anderen Mitspielers immer weiter herauskristalisieren.
Falls nun Spieler i glaubt, er hätte auf die möglichen Strategien des Gegners s_{-i} eine

beste Antwort, stellt sich die Frage, sollte er sie dann auch daraufhin spielen? Wenn der Gegner aber mit einer dieser besten Antworten rechnet, sollte dann Spieler i die beste Antwort erst gar nicht spielen, oder doch?
Um diese Probleme zu erörtern, betrachtet man die gemischten Strategien dieser Spiele. Im folgendem werden zuerst einige Beispiele in gemischten Strategien präsentiert, bevor die Definitionen und einige "Interpretationen" aufgezeichnet werden.

4.2 Beipiele

4.2.1 Das "Fingerschnippen"

Spieler 1 gewinnt bei gerader Summe
Spieler 2 gewinnt bei ungerader Summe

	1F	2F
1F	1,0	0,1
2F	0,1	1,0

Wesentlich: Es gib kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien
Neuer Ansatz: Gemischte Strategien:
Spieler 1 spielt mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ Strategie 1F
Spieler 1 spielt mit Wahrscheinlichkeit $1-p \in [0,1]$ Strategie 2F
Spieler 2 spielt mit Wahrscheinlichkeit $q \in [0,1]$ Strategie 1F
Spieler 2 spielt mit Wahrscheinlichkeit $1-q \in [0,1]$ Strategie 2F

Bezeichnung:
$\sigma_1 = \sigma_1(p)$ gemischte Strategie von Spieler 1
$\sigma_2 = \sigma_2(q)$ gemischte Strategie von Spieler 2

Neue Auszahlungen:

$$u_1(\sigma_1,\sigma_2) := pqu_1(1F,1F)+(1-p)qu_1(2F,1F)+p(1-q)u_1(1F,2F)+(1-p)(1-q)u_1(2F,2F)$$

Analog: 2 Personen und je 2 Strategien
Speziell:

$$\begin{aligned} u_1(\sigma_1,\sigma_2) &= pq + (1-p)(1-q) = 1 + 2pq - p - q \\ u_2(\sigma_1,\sigma_2) &= (1-p)q + (1-q)p = -2pq + p + q \end{aligned}$$

Wir erhalten die Nash-Gleichgewichte:
D.h. σ_1^*, σ_2^* (d.h. $(p^*, q^*) \in [0,1] \times [0,1]$)
mit

$$\begin{aligned} u_1(\sigma_1^*,\sigma_2^*) &\geq u_1(\sigma_1,\sigma_2^*) \\ u_2(\sigma_1^*,\sigma_2^*) &\geq u_1(\sigma_1^*,\sigma_2) \end{aligned}$$

Konkret:

$$1 + 2p^*q^* - p^* - q^* \geq 1 + 2pq^* - p - q^* \Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$$

$$-2p^*q^* + p^* + q^* \geq -2p^*q + p^* + q \Rightarrow p^* = \frac{1}{2}$$

In reinen Strategien wäre ein Nash-Gleichgewicht gegeben falls: $p^*, q^* \in \{0, 1\}$
Fazit: Das erweiterte Spiel hat Nash-Gleichgewicht: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Variante A des "Fingerschnippen"

Zwei Personen spielen nach selben Regeln wie in Beispiel 2.1, allerdings mit der Auszahlungsmatrix:

	1F	2F
1F	1,-1	-1,1
2F	-1,1	1,-1

Dieses Spiel wird in der Literatur in der Regel mit "Matching Pennies " bezeichnet.

Auch hier gibt es in reinen Strategien keinn Nash-Gleichgewicht. Wir betrachten den gleichen Ansatz wie in Beispiel 2.1.
Für zwei Personen mit je zwei Strategien ergibt sich folgende Auszahlungsfunktion:

$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = pq + (1-p)q + p(1-q) - (1-p)(1-q) = 2q - 1$
$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = -pq + (1-p)q + p(1-q) - (1-p)(1-q) = -4pq + 2q + 2p - 1$

Als Nach-Gleichgewicht erhalten wir, wie in Variante 1: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Variante B des "Fingerschnippen"

Ausgangsituation wie im Beispiel 2.1, allerdings mit folgender Auszahlungsmatrix:

	1F	2F
1F	1,-1	-2,2
2F	-2,2	3,-3

Dieses Spiel scheint auf dem ersten Blick ein faires Spiel zu sein. Falls die möglichen Strategiekombinationen (1,1),(1,2),(2,1),(2,2) - in Klammern steht die Anahl der gehobenen Finger des jeweiligen Spielers - gleichhäufig auftreten, ist die Gewinnerwartung eines jeden Spielers gleich Null. Allerdings ist dieses Spiel nicht gerecht wie gleich aufgezeigt wird. Dabei geht man davon aus, dass beide Spieler jeweils wie im vorigem Beispiel eine gemischte Strategie wählen:

$$u_1 = 8pq - 5p - 5q + 3$$
$$u_2 = -8pq + 5p + 5q - 3$$

Wir erhalten die Nash-Gleichgewichte: $p^* = \frac{5}{8}$, $q^* = \frac{5}{8}$.

Falls Spieler 2 die Strategie $q = q^* = \frac{5}{8}$ wählt, kann Spieler 1 jede beliebige Strategie wählen. Auf lange Sicht wird er mindestens je Spiel ein Verlust von $\frac{1}{8}$ hinnehmen müssen, denn:

$$u_1(\sigma_1(p^*), \sigma_2(q^*)) = -\frac{1}{8}$$
$$u_2(\sigma_1(p^*), \sigma_2(q^*)) = \frac{1}{8}$$

4.2.2 Affenspiel bei simultaner Zugfolge

Wiederholung der Spielsituation aus Lektion 2:

	K	W
K	3,5	1,9
W	4,4	0,0

Entsprechende Rechnung zeigt: $q^* = \frac{1}{2}$, $p^* = \frac{1}{2}$ (in reinen Strategien haben wir die 2 Nash-Gleichgewichte $p^* = 1, q^* = 0$ und $p^* = 0, q^* = 1$).

4.2.3 Bach oder Sibelius (Battle of Sexes)

Variante A von Bach oder Sibelius

	Bach	Sibelius
Bach	k,1	0,0
Sibelius	0,0	1,k

wobei $k > 1$ gelten soll.
$u_1 = pqk + (1-p)(1-q) \cdot 1$
$u_2 = pq \cdot 1 + (1-p)(1-q) \cdot k$
Wir erhalten die Nash-Gleichgewichte: $p^* = \frac{1}{k+1}$, $q^* = \frac{k}{k+1}$.

Variante B von Bach oder Sibelius

	Bach	Sibelius
Bach	k,1	0,$\frac{k}{2}$
Sibelius	$\frac{k}{2}$,0	1,k

wobei $k \geq 1$ gelten soll.
$u_1 = (\frac{k}{2}+1)pq + (\frac{k}{2}-1)q - p + 1$
$u_2 = (\frac{k}{2}+1)pq - \frac{k}{2}p - kq + k$
Wir erhalten die Nash-Gleichgewichte:
für $k = 1, 2$: $p^* = \frac{2k}{k+2}$, $q^* = \frac{2}{k+2}$, für $k > 2$: $p^* = 0$, $q^* = 0$.

4.2.4 Elfmeterschießen-Dominanz in gemischten Strategien

Spieler 1 (Torschützte) und Spieler 2 (Torwart) haben folgende Möglichkeiten: (Oben, Links), (Oben, Rechts), (Mitte, Rechts), (Mitte, Links), (Unten, Links), (Unten, Rechts). Das Spiel wird aus Sicht von Spieler 1 betrachtet und führt zu folgender Auszahlungsmatrix:

	Links	Rechts
Oben	3,-	0,-
Mitte	0,-	3,-
Unten	1,-	1,-

Die Strategie "Unten" für Spieler 1 wird durch keine seiner reinen Strategien dominiert, jedoch von der gemischten Strategie $p_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Für alle möglichen Strategien von Spieler 2 $p_2 = (q, 1-q)$ mit denen Spieler 1 rechnen kann, wäre seine beste Antwort entweder "Oben" ($p \geq \frac{1}{2}$) oder "Mitte" ($p \geq \frac{1}{2}$) aber niemals "Unten". $u_1((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (q, 1-q)) = \frac{3}{2}$

Wenn Spieler 1 "Oben" und "Mitte" mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ spielt, dann ist seine erwartete Auszahlung $\frac{3}{2}$ unabhängig davon, was für eine Strategie (rein oder gemischt) Spieler 2 spielt.

Eine reine Strategie kann eine beste Antwort auf eine gemischte Strategie sein, ohne dass diese reine Strategie beste Antwort auf eine reine Strategie ist.

Hierzu vergleiche man das modifizierte Elfmeterschießen:

	Links	Rechts
Oben	3,-	0,-
Mitte	0,-	3,-
Unten	2,-	2,-

Die Strategie "Unten" des Spielers 1 ist weder beste Antwort auf die Strategie "Links" noch auf die reine Strategie "Rechts" des Spielers 2. Sie erweißt sich jedoch als beste Antwort auf die gemischte Strategie $p_2 = (q, 1-q)$ des Spielers 2, falls $\frac{1}{3} < q < \frac{2}{3}$, da für

$$u_1(oben, (q, 1-q)) = 3q$$
$$u_1(mitte, (q, 1-q)) = 3(1-q)$$
$$u_1(unten, (q, 1-q)) = 2$$

das folgende Nash-Gleichgewicht gilt:

$$u_1(oben, (q, 1-q)) < u_1(unten, (q, 1-q)) \iff q < \frac{2}{3}$$
$$u_1(mitte, (q, 1-q)) < u_1(unten, (q, 1-q)) \iff q > \frac{1}{3}$$

4.3 Existenz von Nash-Gleichgewichten

4.3.1 Definitionen und Bemerkungen

4.3.1 Definition. Gegeben sei ein Spiel in Normalform mit n Spielern $\{1, ..., n\}$,
$S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$, $u_i : S \to \mathbb{R}$.
Voraussetzung: S_i sei endlich. $S_i = \{s_i^{(1)}, ..., s_i^{(m_i)}\}$, $|S_i| = m_i$.
$\Delta S_i = \Delta(S_i) := \left\{(p_1^{(i)}, ..., p_{m_i}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum p_j^{(i)} = 1, p_j^{(i)} \geq 0\right\}$
$u_i(\sigma_1, ..., \sigma_n) = \sum .. \sum p_{j_1}^{(1)} p_{j_2}^{(1)} ... p_{j_n}^{(n)} u_i(s_1^{(j_1)}, ..., s_n^{(j_n)})$
Damit: Neues Spiel $\{1, ..., n\}$, $\Delta S = \Delta S_1 \times ... \times \Delta S_n$, u_i

4.3.2 Bemerkung. *1. $S_i \rightsquigarrow \Delta S_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ m_i-Simplex (kompakt, konvex)*

2. Auch $|S_i| = \infty$ kann behandelt werden.

4.3.3 Definition. $s_i \in S_i$ ist beste Antwort auf $s_{-i} \in S_{-i}$, wenn

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_i' \in S_i = sup\{u_i(s_i, s_{-i}) : s_i' \in S_i\} \in \mathbb{R}$$

$$b_i(s_{-i}) := \{s_i \in S_i : s_i \text{ beste Antwort auf } s_{-i}\} \subset S_i$$

Aber: S_i kompakt und u_i stetig $\Rightarrow b_i(s_i) \neq \emptyset$.

4.3.4 Satz. *s^* ist Nash-GG $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., n\}$: $b_i(s_{-i}) \ni s_i^* \Leftrightarrow s^* \in b(s^*)$*

Beweis. Mit der Notation aus voriger Bemerkung folgt:
s^* ist Nash - GG $\Leftrightarrow \forall i\ u_i(s^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \Leftrightarrow \forall i\ u_i(s^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$

$\forall i \in \{1, ..., n\}$: $b_i(s_{-i}) \ni s_i^* \Leftrightarrow \forall i\ s^* \in \left\{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})\right\}$
$\forall i\ s^* \in \left\{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})\right\} \Leftrightarrow \forall i\ u_i(s^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$
$s^* \in b(s^*) \Leftrightarrow s^* \in \left\{s^* \in S_i : u_i(s^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})\right\}$
$s^* \in \left\{s^* \in S_i : u_i(s^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})\right\} \Leftrightarrow \forall i\ u_i(s^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$ □

4.3.2 Beispiel: Cournot-Oligopol

Gegeben: n Firmen mit gleichem Produkt. Zusammengefasst:
$b(s) := (b_1(s_{-1}), ..., b_n(s_{-n})) \subset S$
$s \in S$, $b : S \to S$ beste Antwort-Korrespondenz:

Konkret: Mit der Preisfunktion $p(s) = P - (s_1 + ... + s_n)$, wobei s_i = Produktionsmenge des Unternehmen i und P den vorhandenen Marktpreis repräsentieren, ergibt sich die Gewinnfunktion $u_i(s) = p(s)s_i - cs_i$ mit Fixkosten c.
Die Gewinnfunktion ist zu Maximieren: $\frac{\delta u_i(s)}{\delta s_i} = 0$
$\Rightarrow 0 = P - c - \sum_{j=1, j \neq i}^{n}(s_j) - 2s_i \qquad 2s_i = P - c - \sum_{j \neq i}(s_i)$
Beste Antwort: $b_i = \frac{1}{2}(P - c - \sum_{j \neq i}(s_i))$ Maximum, da $\frac{\delta u_i}{\delta^2 s_i}(b_i) < 0$

4.3.3 Beste Antwort in gemischten Strategien

Ein weiterer interessanter Aspekt, im Bezug zur besten Antwort, ist in einem Spiel mit gemischten Strategien gegeben. Ein Spieler wählt eine gemischte Strategie als beste Antwort auf die gemischte Strategie der Anderen. Die Gleichung

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \equiv E_{\sigma_i}(u_i(s_i, \sigma_{-i})) \equiv \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})\sigma_i(s_i)$$

stellt den erwarteten Gewinn des Spielers i, bzgl. seiner Strategie σ_i und den anderen Strategien σ_{-i} der Mitspieler dar.

4.3.5 Definition. Die beste Antwort in einer gemischten Strategie $b_i : \Delta S_{-i} \to \Delta S_i$ ist definiert durch:

$$b_i(\sigma_{-i}) = \left\{ \sigma_i \in \Delta S_i : u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_i^{'} \in \Delta(S_i) \right\}$$

Für jedes $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$, ist

$$u_i^*(\sigma_i) = \max \{ u_i(s_i, \sigma_i) : s_i \in S_i \}$$

4.3.6 Korollar. *Falls die Bedingungen $\sigma_i(s_i) > 0$ und $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i^*(\sigma_i)$ erfüllt sind folgt: $\sigma_i \in b_i(\sigma_{-i})$*

Beweis. Angenommen die Bedingung $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i^*(\sigma_{-i})$ und $\sigma_i(s_i) > 0$ seien erfüllt. Dann ergibt sich mit $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$ und $\sigma_i(s_i) \geq 0$ für jedes $s_i \in S_i$:
$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \equiv \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})\sigma_i(s_i) = \sum_{s_i \in S_i} u_i^*(\sigma_{-i})\sigma_i(s_i) = u_i^*(\sigma_{-i}) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)$
$= u_i^*(\sigma_{-i})$. Andererseits muss für jede gemischte Strategie σ_i^- gelten:
$u_i(\sigma_i^-, \sigma_{-i}) \equiv \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})\sigma_i^-(s_i) \leq \sum_{s_i \in S_i} u_i^*(\sigma_{-i})\sigma_i^-(s_i) = u_i^*(\sigma_i^-)$
Aufgrund dessen folgt, falls die Bedingungen $\sigma_i(s_i) > 0$ und $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i^*(\sigma_{-i})$ erfüllt sind: $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i^*(\sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^-, \sigma_{-i})$ für alle $\sigma_i^- \in \Delta S_i$
Das wiederum Bedeutet das $\sigma_i \in b_i(\sigma_{-i})$ ist. □

4.3.7 Bemerkung. *Dasselbe Ergebnis kann auch über einen Widerspruchsbeweis erzielt werden. Betrachte dazu die Strategie s_i^* die zusätzlich die Bedingungen $\sigma_i(s_i^*) > 0$ und $u_i(s_i^*, \sigma_{-i}) < u_i^*(\sigma_{-i})$ erfüllt. Wähle weiter eine Strategie s_i^- mit der Eigenschaft $u_i(s_i^-, \sigma_{-i}) = u_i^*(\sigma_{-i})$. Dann folgt aufgrund von*

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i})\sigma_i(s_i) = \\ &= u_i(s_i^*, \sigma_{-i})\sigma_i(s_i^*) + \sum_{s_i \neq s_i^*} u_i(s_i, \sigma_{-i})\sigma_i(s_i) \\ &\leq u_i(s_i^*, \sigma_{-i})\sigma_i(s_i^*) + \sum_{s_i \neq s_i^*} u_i^*(\sigma_{-i})\sigma_i(s_i) \\ &< u_i^*(\sigma_{-i})\sigma_i(s_i^*) + u_i^*(\sigma_{-i}) \sum_{s_i \neq s_i^*} \sigma_i(s_i) \\ &= u_i^*(\sigma_{-i})(\sigma_i(s_i^*) + \sum_{s_i \neq s_i^*} \sigma_i(s_i)) = u_i^*(\sigma_{-i}) = u_i(s_i^*, \sigma_{-i}) \end{aligned}$$

dass $\sigma_i \notin b_i(\sigma_{-i})$ ist.

4.3.4 Existenzsatz von Nash und Satz von Glicksberg

Definitionen

4.3.8 Satz (Existenzsatz von Nash). *Zu jedem endlichem Spiel existiert ein Nash-Gleich- gewicht in gemischten Strategien.*

Dieser Satz wurde 1950 von John Nash bewiesen. Er verwendete dabei den Kakutani Fixpunktsatz, der eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist.

4.3.9 Satz (Fixpunktsatz von Brouwer). *Sei X eine nicht leere, kompakte und konvexe Teilmenge der reellen Zahlen und sei f eine stetige Funktion, die Werte in X einnimmt. Dann hat die Funktion f einen Fixpunkt, das heißt es gibt ein $x^* \in X$ mit $x^* = f(x^*)$.*

4.3.10 Definition (Konvexe Menge). Eine Teilmenge U eines reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^m$ heißt konvex, wenn für jedes Paar von Vektoren $x, y \in U$ alle Vektoren der Form $\lambda x + (1-\lambda)y$, $0 \leq \lambda \leq 1$ (die Verbindungsstrecke) ebenfalls zu U gehören.

4.3.11 Definition (Kompakte Menge). Eine Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ ist kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

4.3.12 Definition (Graph einer Korrespondenz). Der Graph einer Korrespondenz (mengenwertigen Abbildung bzw. Funktion) $h : X \to Y$ ist die Menge $\{(x,y)|y \in h(x)\}$.

4.3.13 Satz (Kakutani). *Eine Korrespondenz $f : X \to X$ hat einen Fixpunkt $x \in X$, sodass $x \in h(x)$, wenn:*

1. *X kompakt und konvex in $\mathbb{R}^m$*
2. *$f(x) \neq \emptyset$ und konvex $\forall x \in X$*
3. *f hat abgeschlossenen Graphen*

4.3.14 Definition. f hat abgeschlossenen Graphen $:\Leftrightarrow (y_n, x_n) \to (y, x)$ und
$y_n = f(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in f(x)$.

Beweis. Beweis des Existenzsatzes von Nash:

Zeige: ΔS etc. erfüllt Bedingungen von Kakutani

1. $\Delta S = \Delta S_1 \times ... \times \Delta S_n \subset \mathbb{R}^{m_1+...+m_n}$ ist konvex und kompakt. Sei zum Beweis die Notation aus 3.1 gegeben. $(p_1, .., p_n) = p \in \Delta S$, $\Delta S \neq \emptyset$. Um die Konvexität zu zeigen, muss die Bedingung $q = \lambda p + (1-\lambda)p' \in \Delta S$ erfüllt sein. Das ist der Fall, da mit $\sum_j q_i^{(j)} = \sum_j [\lambda p_i^{(j)} + (1-\lambda)(p'_i)^{(j)}] = 1$ folgt, dass q_i eine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S_i ist.
   ΔS ist kompakt, denn 1. ΔS ist beschränkt. 2. Sei weiter $p^m = (p_1^m, ..., p_n^m)$ eine Reihe, die gegen $p^* = (p_1^*, ..., p_n^*)$ konvergiert. Es folgt $p^* \in \Delta S$, da p_i^* eine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, d.h. die Wahrscheinlichkeiten sich zu eins aufsummieren. $\Rightarrow \Delta S$ ist abgeschlossen.

2. u_i (als Produkt affiner Linearkombination), daher $b(\sigma) \neq \emptyset$
   σ_i, σ_i', $t \in [0,1] \Rightarrow t\sigma_i + (1-t)\sigma_i' \in b(\sigma_{-i})$
   $u_i(t\sigma_i + (1-t)\sigma_i', \sigma_{-i}) = \sum\sum ... =$
   $= tu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) + (1-t)u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) = (t + (1-t))\max.$

3. Ann.: 3° ist verletzt: $\exists (y_n, x_n) \in \Delta S \times \Delta S : (y_n, x_n) \to (y, x)$ und
   $y_n \in b(x_n)\ \forall n$ aber $y \notin b(x)$, $y \in b(x)$: $\exists i\ x_i \notin b(x_{-i})$
   $\Rightarrow \exists \epsilon > 0\ \exists y_i^* \in S_i : u_i(y_i^*, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}) + 3\epsilon$
   u_i stetig, d.h. für n groß:
   $u_i((y_n)_i, (x_n)_{-i}) > u_i(y_i^*, x_{-i}) - \epsilon > u_i(y_i, x_{-i}) + 2\epsilon > u_i((y_n)_i, (x_n)_{-i}) + \epsilon$
   im Widerspruch zur Definition von $y_n \in f(x_n)$: y_i^* besser als $(y_n)_i$!!

□

Verallgemeinerung des Satzes von Nash:

4.3.15 Satz (Glicksberg 1952). *Gegeben ist ein Spiel in Normalform mit*

1. *S ist kompakt und konvex in $\mathbb{R}^m$*
2. *u_i: $S \to \mathbb{R}^m$ stetig für alle i*
3. *$\forall i \forall s_i \in S_{-i} : s \to u_i(s, s_{-i})$ quasikonkav*
   $(u_i(\lambda s + (1-\lambda)s^*, s_{-i}) \geq max\,\{u_i(s, s_{-i}), u_i(s^*, s_{-i})\})$

dann hat das Spiel ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Beweis. ähnlich wie beim Existenzsatz von Nash.

- stetige Auszahlungsfunktion impliziert nicht leere beste Antwort-Korres- pondenz mit abgeschlossenen Graphen.
- Die Quasikonkavität in den eigenen Aktionen der Spieler impliziert, dass die beste Antwort-Korrespondenzen konvex-wertig sind.

□

Gegenbeispiele zum Satz von Glicksberg

Die Notwendigkeit einer der Voraussetzungen des Satzes von Glicksberg, kann man schon bei einem 1 Personenspiel schnell einsehen. Dazu betrachten wir:

- Spieler 1 hat unendlich viele Strategiemöglichkeiten zur Verfügung im Intervall $S = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$, $u(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ für alle $x \in S$. S

  ist nicht kompakt. Die 1. Vorraussetzung des Satzes von Glicksberg ist verletzt. Hier

  existiert kein Nash-Gleichgewicht da $u(x) < e$ aber $sup_{x \in S} u(x) = e$

- Spieler 1 hat wieder unendlich viele Strategiemöglichkeiten zur Verfügung im Intervall

  $S = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $u(1) = 0$ und $u(x) = x$ falls $x \neq 1$ für alle $x \in S$.

  S ist kompakt und konvex aber u: $S \to \mathbb{R}$ ist nicht stetig. Die 2.

  Vorraussetzung des Satzes von Glicksberg ist verletzt. Hier existiert kein Nash-Gleichgewicht,

  da $u(x) < 1$ aber $sup_{x \in S} u(x) = 1$

- Betrachten wir wieder das 2-Personenspiel aus Beispiel 2.1.1 mit anderer Strategiebezeichnung.

	0	1
0	1 , -1	-1 , 1
1	-1 , 1	1 , -1

  Hier sind die Strategiemengen $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \in \mathbb{R}^2$ kompakt und konvex.

  Die Auszahlungsfunktion ist stetig und beschränkt, jedoch nicht quasikonkav, da Bessermengen der Form

  $\{0,1\}$ existieren. Die 3. Vorraussetzung des Satzes von Glicksberg ist verletzt. Dieses

  Spiel hat kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien nach Beispiel 2.1.1

4.4 Resümee zu Nash-Gleichgewichten in gemischten Strategien

- Skepsis bezüglich des Nutzenwertes von Gemischten Strategien:
  In der Realität wird selten eine Entscheidung durch einen Münzwurf getroffen: es scheint fast "heroisch" anzunehmen, auch wenn individuelle Spieler tatsächlich gemischte Strategien verwenden, dass deren Opponenten in der Lage sein werden, korrekt die exakte Wahrscheinlichkeit, die diese Spieler anwenden, vorrauszusagen (das fordert aber genau die Logik des Nash-Gleichgewichtes)

- "purfication argument" von Harsanyi:
  Ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien kann (fast immer) als ein Gleichgewicht in reinen Strategien eines "ähnlichen Spieles" mit ein wenig unvollständiger oder ein bisschen privater Information angesehen werden. (Die wichtigste Eigenschaft eines Nash-Gleichgewichtes in gemischten Strategien ist, dass ein Spieler über die Wahl seines Gegenspielers unsicher ist.)

- Das Problem der Interpretation von gemischten Gleichgewichten:
  Die Gleichgewichte fordern, dass die Spieler in einer ganz bestimmten Weise randomisieren $\Rightarrow$ obwohl sie keine Anreize dazu haben (alle genuzten Strategien sind gleichwertig). Das Bedeutet, die notwendige Bedingung ist für einen plausiblen Gleichgewichtspunkt erfüllt (kein Spieler möchte etwas anderes machen). Jedoch ist unter diesem Umständen die hinreichende Bedingung nicht erfüllt (es gibt keinen zwingenden Grund so zu ziehen, im Gegensatz zum Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien) $\Rightarrow$ gemischte Gleichgewicht sind schwach

4.5 Ausblick

- Korrelierte Gleichgewichte:
  Jede Interaktion findet unter gewissen Umständen statt, von denen sich die Spieler beieinflussen lassen können bzw. an denen sie mitwirken können, d.h. Spieler wählen zu Beginn eine Strategie und kommen dann in mehr oder weniger zufälligen Überlegungen zu entsprechend verbesserten Strategien. Dieses Spiel ist in Normalform, im Gegensatz zu statistischen Spielen nicht möglich, da laut Annahme äußere Faktoren ausgeschlossen sind.

- Evolutionäre stabile Strategien:
  Die Strategieauswahl unterliegt einem evolutionären Prozess, das bedeutet: es gibt eine Population von Organismen, jeder Organismus ist genetisch auf eine bestimmte Verhaltensweise (Strategie) programmiert, erfolgreiche Organismen haben mehr Nachfahren als weniger erfolgreiche und gelegentlich mutiert ein Organismus zu einer alternativen Strategie.
  Dazu stellt sich die Frage: Welche der Organismenverteilungen stabil sind, unter Berücksichtigung folgender Prämisse, dass alle enthaltenen Organismen die gleiche Anzahl an erwarteten Nachfahren haben und auch Mutanten erfolgreich sein können.

4.6 Quellen und Autoren

Quellen
Spiele mit unvollständiger Information:
www.wiwi.hu-berlin.de/wt3/Lehre/ ws02 spieltheorie/folien11.pdf
Miniskript: Erwartungsnutzen und gemischte Strategien:
wip.tu-berlin.de/de/lehre/Spiel/zum herunterladen/ S3/EU Mixed.pdf
Nash Equilibrium:
www.wilsonc.econ.nyu.edu/UGame/Handouts/ ugs03h07nashequilibrium.pdf
Grundanliegen gemischter Gleichgewichte:
www.econ.euv-frankfurt-o.de/ws0304/lect3 h.pdf
Einleitung Die allgemeine Definition dynamischer Spiele:
www.econ.euv-frankfurt-o.de/ws0304/lect15 h.pdf

Autoren
Czauderna Peter, Kremnitz Birgit