LMU München - SS04 - Spieltheorie

Studenten des Kurses, Prof. Schottenloher

27. April 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Das Gefangenendilemma als Prototyp eines Spiels in Normalform und das Konzept des Nash-Gleichgewichts

1.1 Ein Dilemma – viele Gesichter

Das Gefangenendilemma taucht in verschiedensten Zusammenhängen auf. Bevor wir uns diesen zuwenden (1.1.2-1.2.3), soll kurz an seine ursprüngliche Gestalt (1.1.1) erinnert werden.

1.1.1 Das klassische Gefangenendilemma

> Zwei Verdächtige werden in Einzelhaft genommen. Der Staatsanwalt ist sich sicher, daß sie beide eines schweren Verbrechens schuldig sind, doch verfügt er über keine ausreichenden Beweise, um sie vor Gericht zu überführen. Er weist jeden Verdächtigen darauf hin, daß er zwei Möglichkeiten hat: das Verbrechen zu gestehen oder aber nicht zu gestehen. Wenn beide nicht gestehen, dann - so erklärt der Staatsanwalt - wird er sie wegen ein paar minderer Delikte wie illegaler Waffenbesitz anklagen, und sie werden eine geringe Strafe bekommen. Wenn beide gestehen, werden sie zusammen angeklagt, aber er wird nicht die Höchststrafe beantragen. Macht einer ein Geständnis, der andere jedoch nicht, so wird der Geständige nach kurzer Zeit freigelassen, während der andere die Höchststrafe erhält.

(Luce, R./Raiffa, H.: Games and Decisions, New York 1957, zit. nach Holler/Illing, 2).

Frage: Welche Strategie soll man als Gefangener bevorzugen?

Antwort: Wir unterscheiden zwei Fälle: (1) Angenommen, der andere Gefangene gesteht das Verbrechen. In diesem Fall wäre es vernünftig, ebenfalls zu gestehen, da man sonst die Höchststrafe (also keine mildernden Umstände) zu erwarten hätte. (2) Angenommen, der andere Gefangene legt kein Geständnis ab. Auch dann wäre ein Geständnis nahe liegend, da man selbst freikommt, während der andere die Höchststrafe bekommt. – Offensichtlich scheint also ein Geständnis (Nicht-Kooperation = Defektieren) in jedem Fall die bessere Strategie zu sein.

1.1.2 Die Kartellabsprache

Eine weniger weit hergeholte Spielart des Gefangenenendilemmas ist folgendes Beispiel aus der Ökonomie zweier Öl exportierender Länder. Der erzielte Gewinn ist abhängig vom Angebot, d.h. von der Förderung. Hohe Produktion führt zu einem Preisverfall, niedrige Produktion zu einem Preisanstieg. Wie in 1.1.1 sind drei verschiedene Situationen denkbar:

- Fördern beide Länder wenig Öl (Kooperation: Kartellabsprache), profitieren beide vom hohen Ölpreis und erzielen z.B. jeweils einen Gewinn von 7 (Mrd. $).
- Fördern beide Länder viel Öl, sinkt der Ölpreis, und der Gewinn reduziert sich auf z.B. 2 (Mrd. $).
- Fördert das eine Land mehr Öl als sein Konkurrent, kann es das Öl zu geringerem Preis anbieten, verdrängt den Konkurrenten vom Markt und erwirtschaftet allein einen Gewinn von z.B. 10 (Mrd. $), während das andere Land leer ausgeht.

Frage: Für welche Strategie soll sich ein Land entscheiden?

Antwort: (1) Falls das andere Land viel Öl fördert, muss man es ihm gleichtun, da man sonst nicht konkurrenzfähig ist. (2) Und wenn das andere Land nur wenig Öl fördert, kann man durch hohe Ölförderung den gesamten Gewinn für sich behalten. – Auch hier scheint man mit der Strategie Hohe Förderung = Defektieren besser zu fahren.

1.1.3 Unser Seminar

Schließlich lässt sich sogar die Vortragsreihe, die womöglich im Anschluss an das Spieltheorie-Seminar stattfinden soll, als Gefangenendilemma analysieren. Jeder Referent hat zwei Möglichkeiten: zu kooperieren und auch zu den Vorträgen seiner Kommilitonen zu erscheinen oder zu defektieren und nur beim eigenen Vortrag anwesend zu sein. (Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass sich die eigene Entscheidung und die Entscheidung der andern nicht gegenseitig beeinflussen.) Hinweis: Eine gewichtige Voraussetzung dieses Dilemmas ist natürlich die (angreifbare: gilt nicht Wissenserwerb > Zeitersparnis?) Güterhierarchie „gut besuchter Vortrag plus eigene Zeitersparnis > gut besuchter Vortrag > schlecht besuchter Vortrag plus Zeitersparnis > schlecht besuchter Vortrag“.

Frage: Was ist für den Einzelnen die optimale Strategie?

Antwort: Auch hier hilft eine Fallunterscheidung weiter: (1) Falls die anderen Seminarteilnehmer kooperieren und auch fremde Vorträge besuchen, scheint Defektieren die bessere, da zeitsparende Strategie zu sein. (2) Falls die anderen defektieren, sollte man ihnen erst recht nicht den Gefallen der Kooperation tun. – In jedem Fall scheint also Defektieren die bessere Strategie zu sein.

1.2 Das Gefangenendilemma als Paradox

(1) Eine Analyse dieser drei Szenarien hat ergeben, dass der einzelne Spielteilnehmer (egal ob er Gefangenener, Ölmulti oder Seminarteilnehmer ist) besser damit beraten ist, zu defektieren (= gestehen, viel Öl fördern, nur zum eigenen Vortrag erscheinen) als zu kooperieren (= Geständnis verweigern, Ölförderung beschränken, andere Vorträge besuchen).
(2) Allerdings hat diese scheinbar optimale Strategie einen Haken: Jeder Teilnehmer wird nämlich diese Überlegung anstellen und folglich defektieren, d.h. es legen beide Gefangenene ein Geständnis ab, es betreibt jedes Land eine hohe Ölförderung, es erscheint jeder Teilnehmer nur zu seinem eigenen Vortrag.
(3) Dies ist freilich mitnichten das beste Ergebnis für beide Spieler; ein weitaus besseres Ergebnis hätte sich erzielen lassen, wenn die Spieler kooperiert hätten, d.h. wenn sie beide nicht gestanden, beide wenig Öl gefördert oder zu den Vorträgen anderer erschienen wären.
(4) Somit entpuppt sich das Gefangenendilemma als Paradox: Es führt zu dem denkbar schlechtesten Ergebnis für beide Beteiligten, wenn jeder für sich das scheinbar Optimale tut, nämlich zu defektieren statt zu kooperieren.
(5) Somit muss Adam Smiths These, durch Streben eines jeden Individuums nach seinem eigenen Vorteil werde der optimale Zustand für die Gesellschaft erreicht, erweitert werden: Der optimale Zustand wird nur dann erreicht, wenn jeder nicht nur nach seinem eigenen Vorteil strebt, sondern auch nach dem der andern.

1.3 Mathematische Formulierung

1.3.1 Normalform eines Spiels

- Im folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Spieler. $I = \{1, ..., n\}$ ist somit die Menge der Spieler. In der Regel gilt $n \geq 2$. Im Fall $n = 1$ handelt es sich nicht um ein Spiel, sondern um eine Entscheidungsfrage eines Einzelnen.

- Für jeden Spieler $i \in I$ ist S_i die Menge der **reinen Strategien** (seine Entscheidungsmöglichkeiten).
- $S := S_1 \times ... \times S_n$ bezeichne den **Strategieraum**.
- $s := (s_1, ..., s_n) \in S$ ist ein n-Tupel von Strategien und wird als **Strategieprofil** bezeichnet.
- $\forall i \in I$ ist $p_i : S \to \mathbb{R}$ die **Auszahlungsfunktion (payoff function)** (der Gewinn den der Spieler bekommt).
- Ein **(n-Personen) Spiel in Normalform (strategischer Form)** ist dann das Tripel $(I, S, (p_i)_{i \in I})$.

1.3.2 Entscheidungsmatrizen zur Veranschaulichung

Als Beispiel betrachten wir den Fall $I = \{1, 2\}, S_1 = \{A, B\}, S_2 = \{a, b\}$ (zwei Spieler und jeder kann zwei Strategien wählen). Die Auszahlungsfunktionen p (für Spieler 1) und q (für Spieler 2) lassen sich dann als $\mathbb{R}^{2\times2}$ Matrizen darstellen. Als Veranschaulichung können wir schreiben :

$1\backslash2$	a	b
A	p_{11}, q_{11}	p_{12}, q_{12}
B	p_{21}, q_{21}	p_{22}, q_{22}

(1)

Im Fall des Gefangenendilemmas erhalten wir eine symmetrische Tafel:

$1\backslash2$	$Gestehen(B)$	$Nicht\ gestehen(K)$
$Gestehen(B)$	$(2, 2)$	$(0, 10)$
$Nicht\ gestehenn(K)$	$(10, 0)$	$(7, 7)$

Dabei steht K für "kooperieren" und B für "betrügen".

1.3.3 Nash-Gleichgewicht

Wenn $s := (s_1, ..., s_n) \in S$ eine Strategieprofil ist und für Spieler i statt der Strategie s_i die Strategie $t_i \in S_i$ verwendet wird, schreiben wir (s, t_i).

Ein Strategieprofil $s \in S$ heißt **Nash-Gleichgewicht**, wenn

$$\forall i \in I : p_i(s) = max_{\forall t_i \in S_i}(s, t_i). \tag{2}$$

Das heißt wenn alle anderen Spieler an ihrer Strategie festhalten, dann gibt es für den einzelnen keine bessere Strategie als die momentan gewählte.

1.3.4 Klassifikation der Nash-Gleichgewichte in einfachen 2-Personen Spielen

Betrachten wir also nochmal den Fall des 2-Personen Spiels von oben. Zusätzlich nehmen wir an, dass es einem Spieler nie egal ist welche Strategie er wählt, d.h. $p_{11} \neq p_{21}$ und $p_{12} \neq p_{22}$ und entsprechend $q_{11} \neq q_{12}$ und $q_{21} \neq q_{22}$.

Damit eines der möglichen Strategieprofile Aa,Ab,Ba und Bb ein Nash-Gleichgewicht ist, muss an dieser Stelle p vertikal und q horizontal maximal sein. Wir ersetzen in der Auszahlungsfunktion den größeren Wert durch 1 und den kleineren durch 0. Die Nash-Gleichgewichte sind dann dann dort, wo in beiden Auszahlungsfunktionen eine 1 steht. Es gibt damit 4 Möglichkeiten für die Auszahlungsfunktion eines Spielers. Wie wir in der Tabelle sehen gibt es so entweder ein oder zwei Gleichgewichtspunkte.

Beispiel:

Wir können das ganze z.B. auf den Fall des Gefangenendilemmas anwenden.

Wir erhalten dann für Spieler 1

	B	K
B	1	1
K	0	0

und für Spieler 2:

	B	K
B	1	0
K	1	0

.

In unserer Tabelle ist das der Fall ganz links oben. Es gibt somit genau ein Nash-Gleichgewicht, nämlich wenn beide betrügen.

1.3.5 Ausblick : Gemischte Strategien

Am 11. Oktober 1950 veröffentliche John Nash den Artikel [Nas51] , in dem er auf n-Personen Spiele und Gleichgewichte und Lösungen derselben eingeht.

Er betrachtete nicht nur die Möglichkeit einer diskreten Wahl ("gestehe ich oder nicht"), sondern baute seine Theorie auf den Fall auf, dass Strategien auch kombiniert werden können ("Wieviel Öl soll produziert werden" - hier ist es nur eine Vereinfachung die Möglichkeiten 'Viel' und 'Wenig' anzugeben).

Wir führen nun zusätzlich den Begriff gemischte Strategie ein. Eine **gemischte Strategie** σ_i von Spieler i wird durch $c_i \in \mathbb{R}^{|S_i|}$ repräsentiert, wobei $\sum_\alpha c_{i\alpha} = 1$. Es gilt dann $\sigma_i := \sum_\alpha c_{i\alpha} s_{i\alpha}$, wobei α die reinen Strategien $s_{i\alpha} \in S_i$ indiziert.

Zur Auszahlungsfunktion in diesem Fall schreibt Nash:

> The payoff function, p_i, ..., has a unique extension to the n-tupels of mixed strategies which is linear in the mixed strategies of each player [n-linear].

Die Definition des Gleichgewichtes ist exakt die selbe wie vorher in (1) (t_i ist nun natürlich eine gemischte Strategie).

Der Übergang von endlich vielen reinen Strategien auf unendlich viele gemischte Strategien, macht es nun natürlich unmöglich die Gleichgewichtspunkte quasi durch ausprobieren zu ermitteln. Dafür beweist Nash unter Verwendung von differnetialtopologischen Aussagen (Satz von Brouwer) : Jedes Spiel hat einen Gleichgewichtspunkt.

Literatur

[Nas51] John Nash. *Non-cooperative games.* Annals of Mathematics, Vol. 54, No. 2, 1951.

Literatur

[Axelrod 1987] Robert Axelrod: Die Evolution der Kooperation. München 1987: Oldenbourg. Kapitel 1 (S. 3-22) entält eine pointierte Darstellung des Gefangenendilemmas. Lohnenswert ist auch Kapitel 6 (S. 99-111: Vorschläge für erfolgreiches Verhalten), in dem Strategien für das iterierte Gefangenendilemma erörtert werden.

[Holler /Illing 1991] Manfred J. Holler / Gerhard Illing: Einführung in die Spieltheorie. Berlin–Heidelberg 1991: Springer. Klassische Einführung in die Spieltheorie mit mathematischem Akzent. Beginnt traditionellerweise mit dem Gefangenendilemma (Kapitel 1.2: S. 1-8).

[Klaus 1968] Georg Klaus: Spieltheorie in philosophischer Sicht. Berlin 1968: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Vgl. bes. Abschnitt 3.5 (S. 142-155): Nicht-Nullsummenspiel.

[Rieck 1993] Christian Rieck: Spieltheorie. Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler. Wiesbaden 1993. Besonders relevant: Kapitel 3 (S. 35-74): 2×2-Bimatrix-Spiele.

1.4 Autoren

Lektion 1 Benedikt Höfer, Marina Korskova, David Weikersdorfer