

Spatial Games

Anne-Marie Rambichler, Christoph Wichmann

23. März 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Betrachtung von evolutorischen Spielen im Raum	3
1.1	Spatial Games	3
1.2	Allgemeine Definition der räumlichen evolutorischen Spiele	3
2	Betrachtung des räumlichen Gefangenendilemmas	4
2.1	Untersuchung des Basisspiels	4
2.2	Ausweitung des Basisspiels auf den Raum	5
2.3	Grundlegende Szenarien	8
2.3.1	Defektor dringt bei Kooperatoren ein	8
2.3.2	Expansion - Wie entstehen Perserteppiche?	9
2.3.3	Kooperator dringt bei Defektoren ein	9
2.3.4	Vergleich der Invasionen	10
2.3.5	Walker	11
2.4	Verallgemeinerungen	15
2.4.1	Einführung des stochastischen Gewinnens	15
2.4.2	Betrachtung des dynamischen Prozesses in kontinuierlicher Zeit; . .	17
2.4.3	Räumliche Zufallsverteilung der Zellen/Unregelmäßigkeiten	17
2.5	Vergleich des räumlichen PD mit Conways „Game of Life“	18
2.5.1	Beschreibung des „Game of Life“ Conways	18
2.5.2	Unterschiede und Gemeinsamkeiten	18
2.6	Anmerkungen zur Simulation	18
3	Das Falke-Taube-Spiel als Spatial game	19
3.1	Betrachtung des räumlichen Falke-Taube-Spiels	19
3.1.1	Untersuchung des Basisspiels	19
3.1.2	Ausweitung des Basisspiels auf den Raum	22
3.2	Variationen	23
3.3	Hinzunahme neuer Strategien in das H-D-Spiel	25
3.3.1	Hawk-Dove-Retaliator	25
3.3.2	Hawk-Dove-Retaliator-Bully	26

3.4	Graphische Analyse des Falke-Taube Spiels	27
3.4.1	Vergleich mit der klassischen evolutorischen Version	27
3.4.2	Analyse des räumlichen H-D-R-Spiel	29
4	Zusammenfassung	29

1 Betrachtung von evolutorischen Spielen im Raum

1.1 Spatial Games

In Spatial Games sind die Mitglieder einer Population (Phänotypen, Spielertypen) in einem 2- oder höherdimensionalem Feld angeordnet. In jeder Runde spielt jedes Mitglied gegen alle seine Nachbarn und ändert ggf. seine Strategie für die nächste Runde, abhängig von der Strategie des Nachbarn mit der höchsten Auszahlung. Bei den Spatial Games treffen zwei Theorien erstmals aufeinander: die der (evolutorischen) *Spieltheorie* und die der *zellulären Automaten*. Einer der Begründer von beiden Theorien war John von Neumann. Die räumliche Erweiterung der evolutorischen Spieltheorie kann die Ergebnisse stark verändern. Im räumlichen Spiel können Strategien nebeneinander existieren, welche sich im klassischen Fall ausschließen. Die Spatial Games bestechen durch ihre mathematischen Eigenschaften und die Dynamik des Systems bei einer recht einfachen zugrunde liegenden Theorie.

1.2 Allgemeine Definition der räumlichen evolutorischen Spiele

Ein geeignetes Basisspiel kann nur eine endlichen Anzahl an Strategien enthalten, dargestellt durch die Strategiemenge Σ . Die Akteure des Spiels werden, wie in der evolutionären Spieltheorie üblich, mit ihrer jeweiligen in einer Runde gewählten Strategie identifiziert. $E[i, j]$ bezeichnet die Auszahlung, die Strategie i erhält, wenn sie auf Strategie j trifft. Damit erhält man die Auszahlungsmatrix $E = (E[i, j])_{i,j}$. Eine endliche Anzahl an Zellen/Feldern wird so angeordnet, dass sie ein Gitter Λ bilden. Λ stellt dann den Raum dar, auf dem das evolutionäre Spiel betrachtet wird. Die Zellen in Λ sind durch eine Menge I indiziert. Zu jeder Zeit ist jede Zelle im Raster durch genau eine Strategie aus Σ belegt.

Ist I eine Zelle aus Λ , so bezeichnet $N(I)$ die Menge aller zu I benachbarten Zellen, jedoch ohne I . In $N^*(I)$ ist hingegen auch I selbst enthalten:

$$N^*(I) = N(I) \cup I.$$

Ein räumliches evolutorisches Spiel ordnet jeder Zelle I aus Λ in der Generation (Runde) t die Strategie $\varsigma_t(I)$ zu. Die Ausgangskonfiguration des Spiels ist die Zuordnung der Strategien $\varsigma_0(I)$ für alle I aus Λ . Der dynamische Prozess ist folgendermaßen spezifiziert:

Zuerst wird der Gesamtpunktstand $s_t(I)$ ermittelt, den die Zelle I in Generation t erhält, wenn sie gegen all ihre Nachbarn (jeweils einzeln) spielt.

$$s_t(I) = \sum_{J \in N(I)} (E[\varsigma_t(I), \varsigma_t(J)])$$

Mit diesen Punktständen, gebildet für alle I aus Λ , wird ein dynamischer Prozess definiert, der jeder Zelle aus Λ eine Strategie in Generation $t+1$ zuordnet. Für jedes I aus Λ bezeichne $\hat{j} \in \Sigma$ diejenige Strategie, die zu der Zelle J aus $N^*(I)$ gehört, die den höchsten Punktstand $s_t(J)$ von allen Nachbarn von I , also allen Zellen aus $N^*(I)$ erhält:

$$\hat{j} = \max_{J \in N^*(I)} \{s_t(J)\}$$

Dann setzt man $s_{t+1}(I) = \hat{j}$. Jede Zelle I , die in Generation t die Strategie $s_t(I)$ verfolgt, übernimmt für Generation $t+1$ die in t erfolgreichste Strategie $s_t(J)$ ihrer Nachbarn. Der dynamische Prozess ist wohldefiniert, wenn:

- die Zelle aus $N^*(I)$ mit dem maximalen Punktestand eindeutig bestimmt ist
- alle Zellen aus $N^*(I)$ mit maximalen Punktestand die gleiche Strategie benutzen

Außerdem wird eine Regel benötigt, die klärt, wie man im Fall eines Punktegleichstands verfährt. Dadurch wird das räumliche evolutionäre Spiel rekursiv definiert.

Bemerkung:

Für jedes so definierte Spiel mit Strategiemenge Σ , der Auszahlungsmatrix E , dem räumlichen Gitter Λ und der Nachbarschaft $N(I)$ für alle Zellen I aus Λ ist die zugehörige räumliche evolutionäre Spieltheorie ein endlicher zellulärer Automat. Hierbei ist anzumerken, dass der Punktestand der Nachbarn einer Zelle wiederum von deren Nachbarn abhängt. Also ist die tatsächliche Anzahl M an Nachbarn, die den Zustand einer Zelle I in der nächsten Generation bestimmt, größer als die der direkten Nachbarn von I : $M > |N(I)|$. Im einfachsten Automaten hingegen haben nur die direkten Nachbarn einer Zelle Einfluss auf deren Zustand in der nächsten Generation, $M = |N(I)|$.

2 Betrachtung des räumlichen Gefangenendilemmas

Das Gefangenendilemma (Prisoner's Dilemma, PD) stellt ein vielfach gebrauchtes Modell für Probleme, die mit der Entwicklung von kooperativen Verhalten zusammenhängen, dar:

- wie entsteht kooperatives Verhalten?
- wie kann es sich entwickeln, wann breitet es sich aus?
- wie kann es ausgelöscht werden?

2.1 Untersuchung des Basisspiels

Das Basisspiel Gefangenendilemma (PD) :

- 2 Spieler $M = \{1, 2\}$ (Individuen oder organisierte Gruppen)
- $S^1 = S^2 = \{D, C\}$ ist die Menge der reinen Strategien für beide Spieler
- zugehörige, symmetrische Bimatrix mit $S < P < R < T$
- Die Spieler entscheiden sich gleichzeitig für eine Strategie, unabhängig voneinander

	C	D
C	(R, R)	(S, T)
D	(T, S)	(P, P)

Im Basisspiel ist D strikt dominant für beide Spieler. Wiederholt man das Spiel jedoch, so erhalten die beiden Spieler, wenn sie stets defektieren, eine geringere Auszahlung, als wenn sie stets kooperieren ($P < R$). Man kann die Auszahlungs-Parameter S , P , R und T , $S < P < R < T$, mit Werten belegen, beispielsweise $S = 0$, $P = \varepsilon$, $R = 1$ und $T = b$ mit $0 \leq \varepsilon \ll 1 < b$. Damit erhält man die Auszahlungs-Bimatrix:

	C	D
C	(1, 1)	(0, b)
D	(b, 0)	(ε , ε)

Vereinfachung, die das Verhalten des Systems erhält: $\varepsilon = 0$; also: $S = P = 0$, $R = 1$ und $T = b > 1$

	C	D
C	(1, 1)	(0, b)
D	(b, 0)	(0, 0)

Das charakteristische Verhalten des Systems hängt von der Größe des Parameters b ab, der den Vorteil des Defektierens beschreibt.

2.2 Ausweitung des Basisspiels auf den Raum

In der räumlichen Betrachtung des PD existieren 2 Spielertypen- solche die immer kooperieren (C) und andere, die stets defektieren (D). Es gibt also nur die 2 reinen Strategien C und D. Diese Strategien/Spielertypen werden auf einem räumlichen Feld verteilt, wo sie interagieren. In einer Generation kämpft jede Zelle gegen all ihre so definierten direkten Nachbarn (jeweils einzeln) und summiert ihre Auszahlungen aus diesen Kämpfen auf. Der Wert einer Zelle wird mit dem ihrer Nachbarzellen verglichen und jede Zelle adaptiert den höchsten Auszahlungsbetrag, der in ihrer Umgebung auftritt. Mit der dadurch entstehenden, neuen Konfiguration der Strategien wird die nächste Runde des Spiels durchgeführt. Es wird weder ein Gedächtnis der Zellen noch irgendwelche strategische Überlegungen derer vorausgesetzt.

Einfachste Bedingungen für das räumliche Spiel:

- ein symmetrisches 2-dimensionales Gitter
- deterministisches Gewinnen
- diskrete Zeit.

In der der Simulation zeigt sich jedoch, dass die grundsätzlichen Ergebnisse der Untersuchung auch dann bestehen bleiben, wenn man diese einfachen Bedingungen abändert. Nowak und May [1] haben gezeigt, dass unter diesen einfachen und rein deterministischen Bedingungen im räumlichen PD selbst organisierende Strukturen entstehen können, in denen C und D unendlich lange nebeneinander existieren.

Die Spieler sind in diesem Spiel in einer Art zellulären Automaten dargestellt. Jede Zelle hat eine Strategie und spielt diesen gegen seine Nachbarn aus. Sie ändert ihre Strategie, falls einer der Nachbarn beim letzten Zug eine höhere Auszahlung als sie selber erhalten hat. Es wird im folgenden immer die sog. *Moore-Umgebung* verwendet, welche alle acht angrenzenden Zellen umfasst. Zum Vergleich ist auch die *von-Neumann-Umgebung* dargestellt.

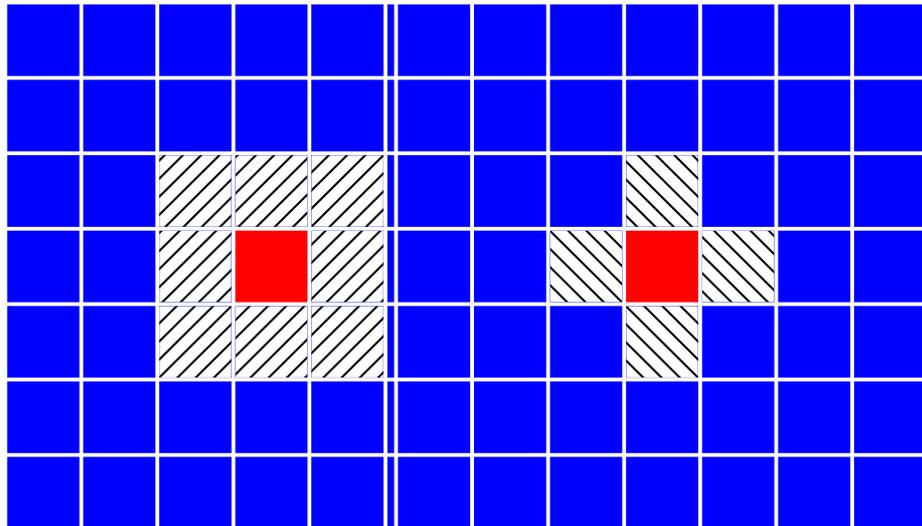


Abbildung 1: Moore-, von-Neumann-Umgebung

Die Auszahlungsmöglichkeiten für die jeweiligen Strategien sind folgende (mit $b > 1$):

$$u(C) = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

$$u(D) = \{0, b, 2b, \dots, 8b\}$$

Diese diskreten Auszahlungen lassen vermuten, dass die räumliche Reziprozität von diskreten Übergangspunkten (Werten von b) abhängt. Für b -Werte $1 < b < 2$ finden sich insgesamt 7 Übergangspunkte. Wir werden sie bei den weiteren Betrachtungen noch öfter verwenden.

$\frac{9}{5} = 1,8$	$\frac{4}{3} = 1,33$
$\frac{8}{5} = 1,6$	$\frac{3}{2} = 1,5$
$\frac{7}{5} = 1,4$	$\frac{2}{1} = 2$
$\frac{6}{5} = 1,2$	$\frac{1}{1} = 1$
$\frac{5}{5} = 1$	$\frac{0}{0} = 0$

Für Werte zwischen zwei Übergangspunkten weist das Spiel die gleiche Dynamik auf. Ein erster Versuch zeigt die Abhängigkeit der Dynamik von dem Parameter b :

Es wird auf einer 100×100 -Matrix gespielt. Die Anfangskonfiguration besteht aus einer zufälligen Anordnung mit 10% Defektoren und 90% Kooperatoren.

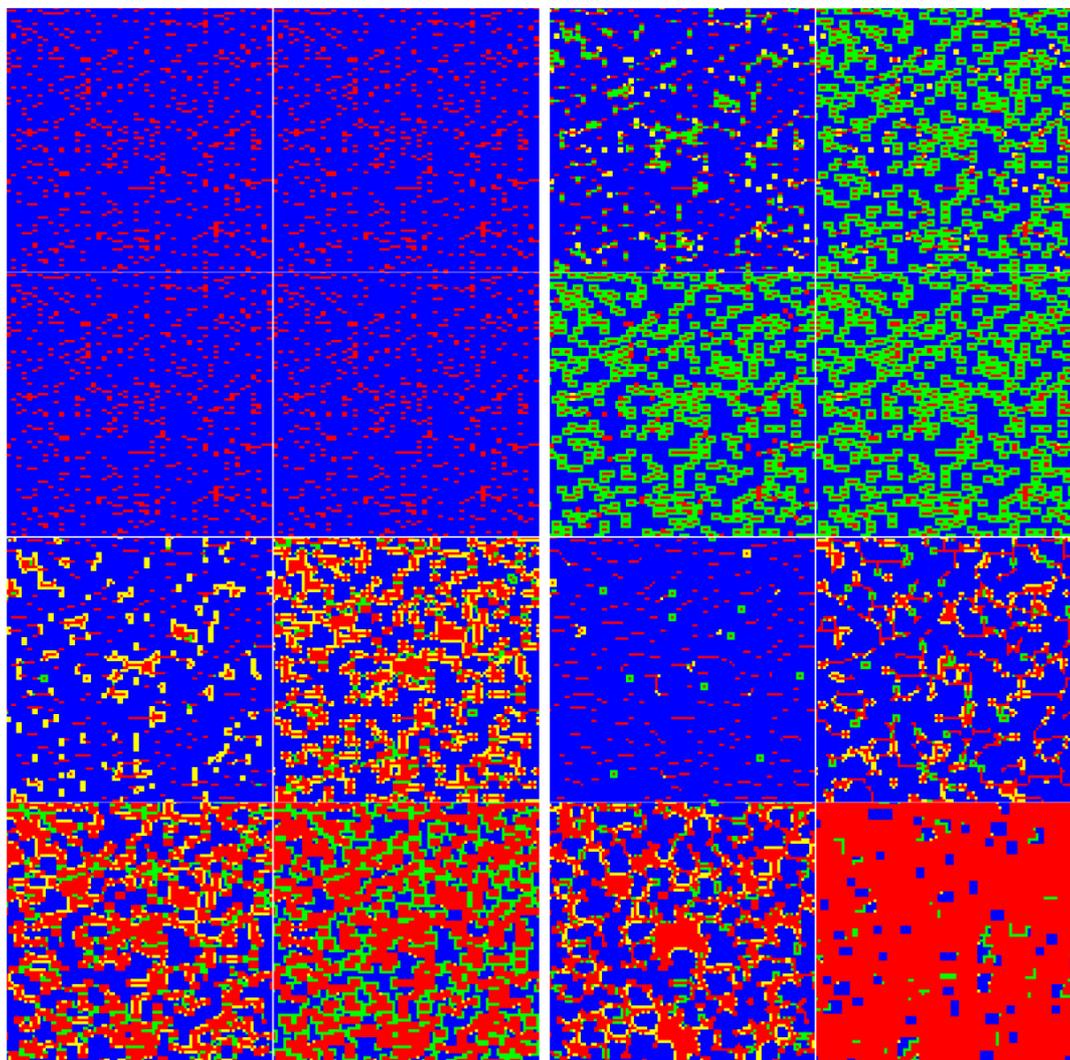


Abbildung 2: Zeitliche Entwicklung für die Parameter 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, 5$ (v.l.n.r.)

Es ist zu beobachten, dass sich abhängig von b die Strategie des Defektierens mehr oder weniger stark ausbreiten kann. Man kann bei einer weiteren zeitlichen Beobachtung außerdem feststellen, dass die Systeme $b = 1.3, 1.5$ die stärkste Dynamik aufweisen. Das System mit $b = 1.7$ verändert sich ab dem Zeitpunkt $t = 5$ überhaupt nicht mehr.

2.3 Grundlegende Szenarien

2.3.1 Defektor dringt bei Kooperatoren ein

Üblicherweise wird bei Spatial Games das Verhalten des Systems nach einer Invasion behandelt. Man betrachtet hierbei zunächst die Dynamik, die entsteht, wenn ein Phänotyp (einzeln oder als Cluster) in ein homogenes Feld eines anderen Phänotyps eindringt. In diesem ersten Fall wird ein einzelner Defektor in eine sonst mit Kooperatoren gefüllte Matrix eingebracht.

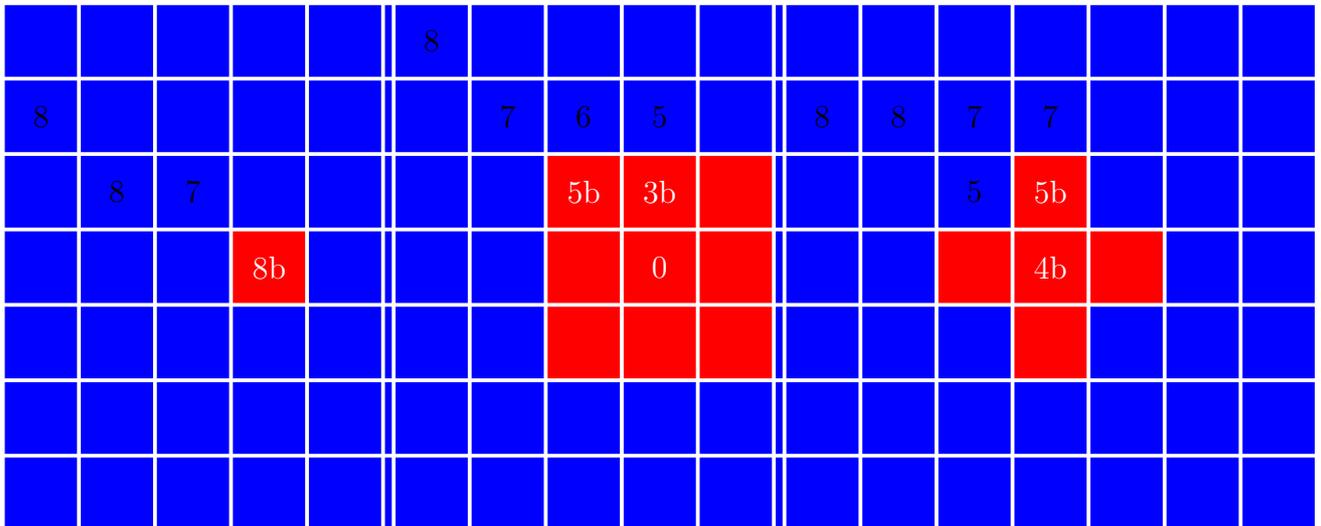


Abbildung 3: Invasion eines Defektors (Rot für Defektoren und Blau für Kooperatoren)

Zunächst erhält der Defektor im ersten Spielzug $8b$. Da wir nur $b > 1$ betrachten, hat er somit eine höhere Auszahlung als seine Nachbarn. Diese übernehmen folglich seine Strategie (Schritt 2). Im nächsten Zug bedarf es einer genaueren Betrachtung: Es können folgende Übergangspunkte festgestellt werden, für die sich die Dynamik des Systems bestimmen lässt.

1. $5b < 6$, das System geht in Zustand 1 zurück
2. $6 < 5b < 7$, das System geht in Zustand 3, und anschließend in Zustand 1
3. $7 < 5b < 8$, das System verändert sich nicht mehr weiter, der Cluster ist stabil
4. $8 < 5b$, der Cluster breitet sich weiter aus

Das Hin- und Herspringen von einer in die andere Konfiguration bezeichnet man als Oszillator. Fall 1) ist ein Oszillator der Periode 2, Fall 2) ein Oszillator der Periode 3.

2.3.2 Expansion - Wie entstehen Perserteppiche?

Für den Fall 4) unseres Beispiels haben wir festgestellt, dass es zu einer weiteren Expansion kommt. Es lohnt, diese in einem größeren Spiel über einen längeren Zeitraum zu beobachten. Für diese Simulation in Abb.4 wurde $b = 1.65$ verwendet.

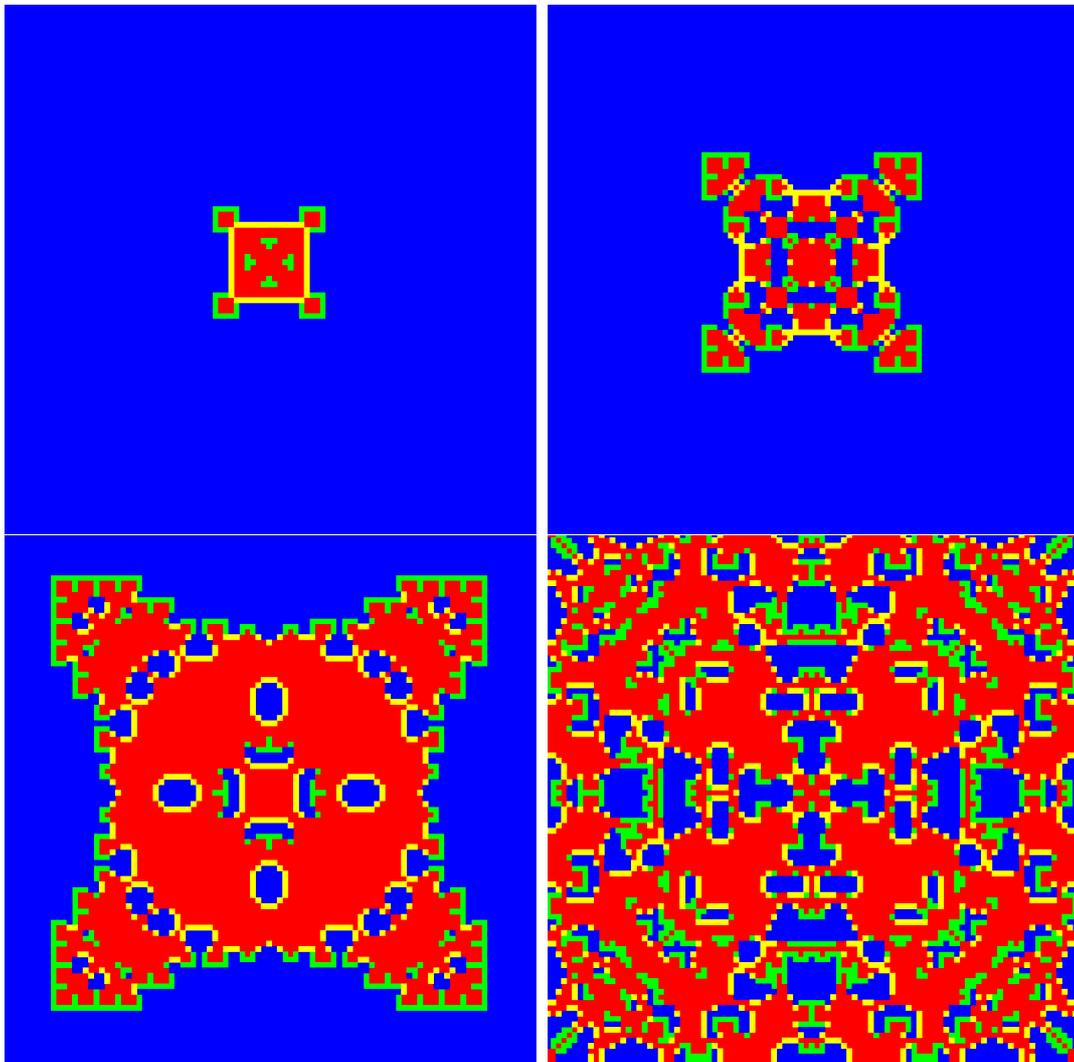


Abbildung 4: Entstehung eines Perserteppiches, Zeitschritte bei 10,20,40,60 (v.l.n.r.) mit $b = 1.65$

Ein System dieser Dynamik wird als wachsender *Perserteppich* bezeichnet. Das Defektieren breitet sich immer weiter aus, wobei beide Strategien langfristig koexistieren.

2.3.3 Kooperator dringt bei Defektoren ein

In nächsten Fall ist der eindringende Phänotyp ein Kooperator. Ein einzelner Kooperator würde mit einer Auszahlung von 0 sofort verschwinden. Daher wird in diesem Beispiel ein

3×3 -Cluster eingebracht.

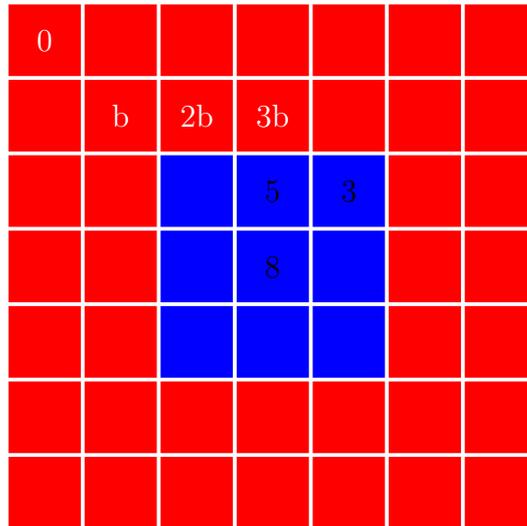


Abbildung 5: Invasion eines 3×3 Clusters von Kooperatoren

Für diesen Fall können folgende Übergangspunkte festgestellt werden:

1. $b < \frac{3}{2}$, der Cluster expandiert gleichmäßig als $n \times n$ Cluster
2. $\frac{3}{2} < b < \frac{5}{3}$, der Cluster expandiert ungleichmäßig
3. $\frac{5}{3} < b < \frac{8}{3}$, das System verändert sich nicht mehr weiter, der Cluster ist stabil
4. $\frac{8}{3} < b$, der Cluster verschwindet innerhalb von zwei Zügen

Die Fälle lassen sich aus den Auszahlungen in Abb.5 bestimmen. Für die Fälle 3) und 4) ist die Dynamik vollkommen bestimmt. Im Fall 1) und 2) kommt es zu Expansion als homogener Cluster, dabei entstehen keine Perserteppiche.

2.3.4 Vergleich der Invasionen

Vergleicht man die Invasionen, lassen sich drei Klassifizierungen bestimmen.

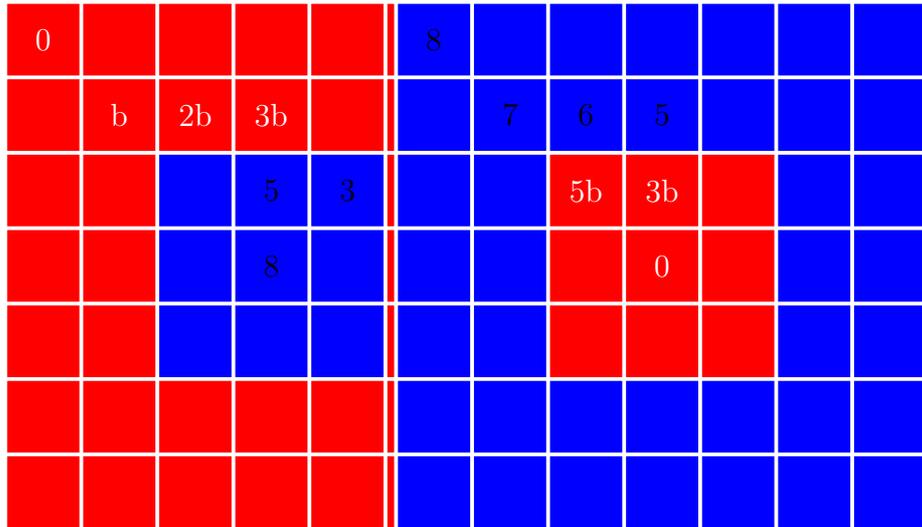


Abbildung 6: Vergleich der Cluster

1. $b < \frac{8}{5}$, nur Kooperatoren-Cluster können wachsen
2. $\frac{5}{3} < b$, nur Defektoren-Cluster können wachsen
3. $\frac{8}{5} < b < \frac{5}{3}$, Cluster beider Phänotypen können wachsen

Wir können also festhalten, dass das Spielfeld für Werte $b < \frac{8}{5}$ langfristig von Kooperatoren dominiert wird. Steigt die Belohnung für das Defektieren in den Bereich von $\frac{8}{5} < b < \frac{5}{3}$, stellt sich ein dynamisches Gleichgewicht ein. Für den Bereich $\frac{5}{3} < b$ dominieren die Defektoren.

2.3.5 Walker

Wir betrachten an dieser Stelle noch die Invasion eines speziellen Clusters, bestehend aus 10 Kooperatoren, des sogenannten Walkers (Läufer) (Abb.7).

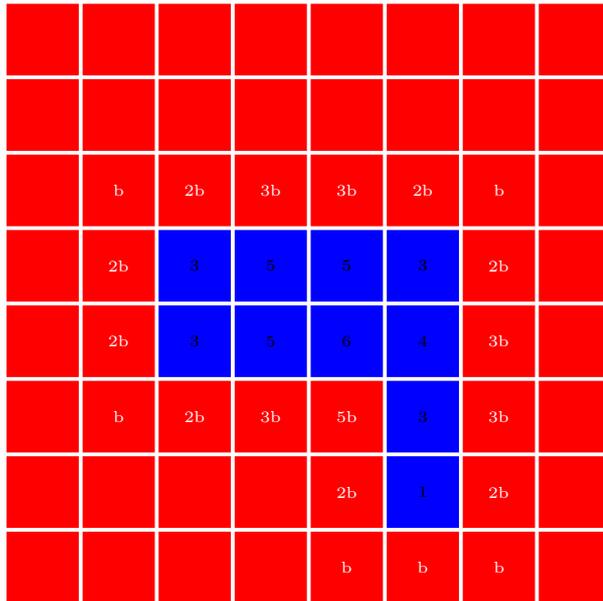


Abbildung 7: Walker mit Auszahlungen

Im Bereich $\frac{3}{2} < b < \frac{5}{3}$ weist der Walker eine interessante Dynamik auf: in jedem Schritt verschwindet das *Bein* und prägt sich auf der anderen Seite aus. Gleichzeitig wandert er ein Feld nach oben. Über mehrere Schritte ergibt sich somit eine Laufbewegung. Abb.8 zeigt drei Schritte des Walkers mit Auszahlungen.

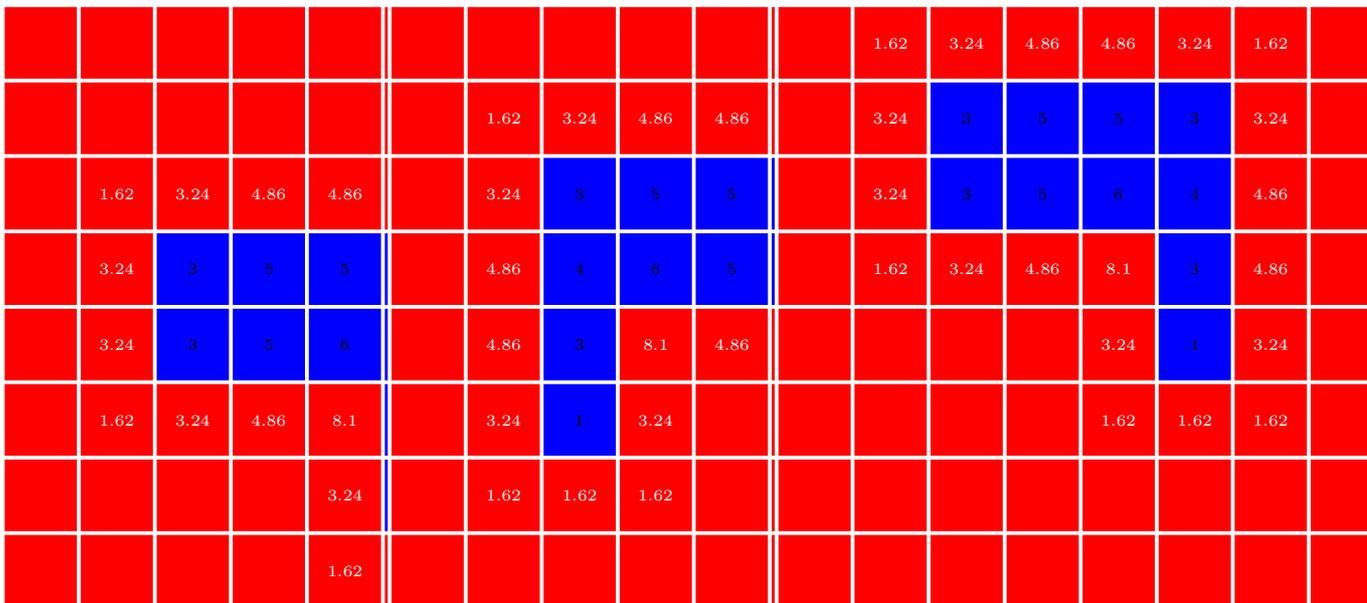


Abbildung 8: Zeitschritte 1-3 für einen Walker mit $b=1.62$

Ein Walker stellt somit einen sich bewegenden, stabilen Cluster dar. Besonders inter-

essant wird es allerdings wenn zwei Walker in einem Feld unterwegs sind und sich annähern. In der folgenden Simulation werden zwei Fälle betrachtet:

- zwei Walker berühren sich
- zwei Walker nähern sich bis auf ein Feld Abstand an

Abb.9 zeigt ein Spielfeld mit insgesamt 4 Walkern von denen jeweils zwei aufeinander treffen.

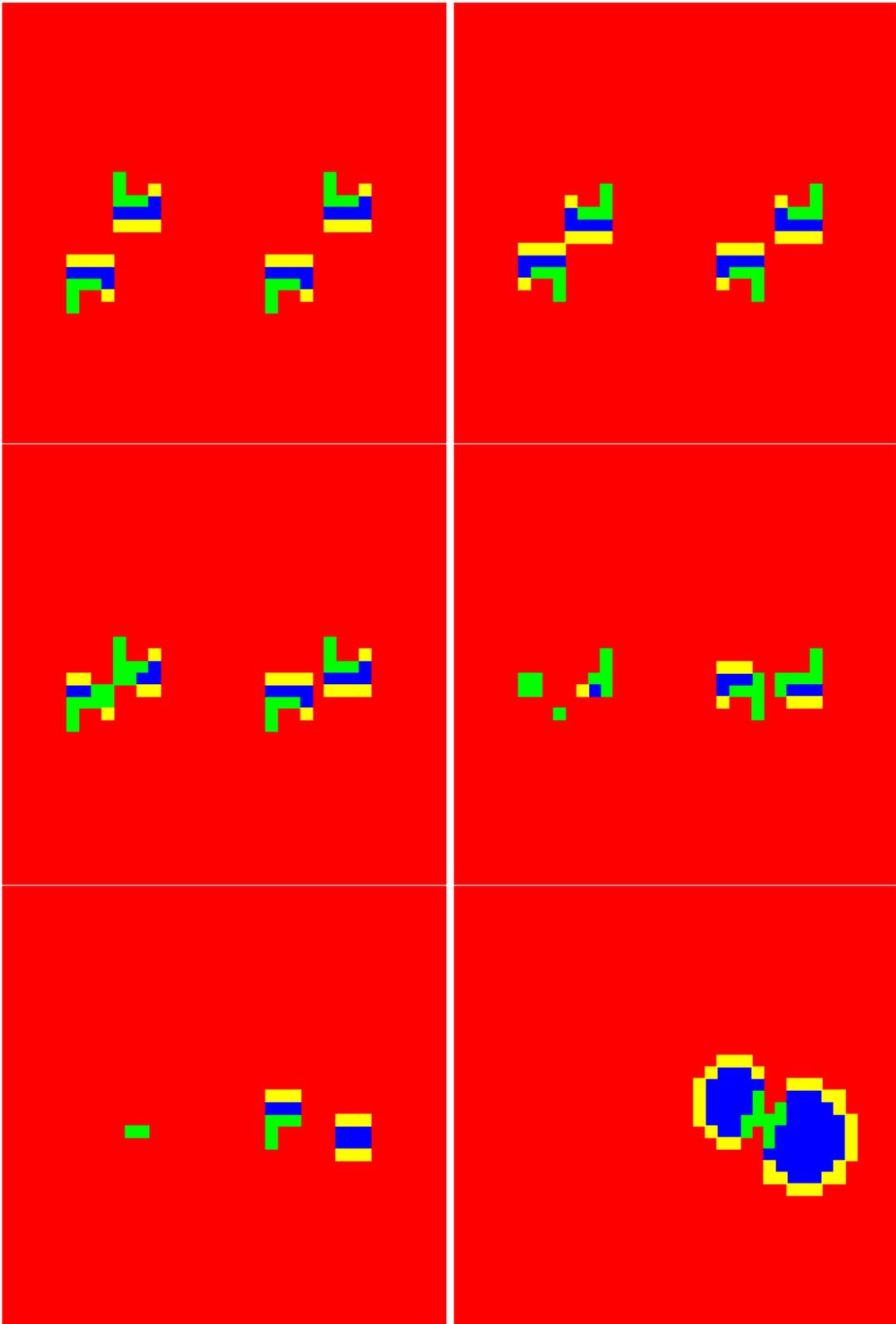


Abbildung 9: Jeweils zwei Walker treffen aufeinander (Zeitschritte 5,7,8,9,10,14 v.l.n.r.) mit $b = 1.66$

Es zeigt sich für den Fall 1), dass sich die beiden Walker gegenseitig eliminieren: Innerhalb von zwei Schritten sind beide Walker verschwunden und kein Kooperator mehr auf dem Feld. Im 2. Fall beobachtet man hingegen ein gänzlich anderes Verhalten: Es bilden sich Strukturen heraus, die nicht nur, wie bisher, stabil sind, sondern sogar expandieren. Diese plötzliche Welle der Expansion nennt man auch *Big Bang*.

2.4 Verallgemeinerungen

2.4.1 Einführung des stochastischen Gewinns

Die Strategien setzen sich beim Ringen mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten um die Vereinnahmung von umgebenden Zellen durch. Betrachtet wird eine Zelle I des Gitters.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Strategie C die Zelle I in der nächsten Runde besetzt, basiert auf der Anzahl der Zellen des Typs C in der Umgebung von I, sowie deren erreichten Punktestände im Spiel gegen deren Nachbarn.

Nun führt man einen Parameter für den Grad der Stochastik ein, indem man für alle Zeiten $s_i = 1$ setzt, wenn die Zelle i einem Kooperator besetzt wird; ansonsten $s_i = 0$. A_i bezeichne die Auszahlung an den Akteur, der Zelle i besetzt. Diese Auszahlung besteht aus den summierten Punkteständen, die dieser aus dem Spiel gegen seine eigene Strategie und die seiner $\nu_i - 1$ direkten Nachbarn aus $N(i)$ erhält. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zelle j in der nächsten Runde von einem C besetzt wird:

$$P_{=}^j = \left(\sum_{i=1}^{\nu_i} A_i^m s_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{\nu_i} A_i^m \right)$$

Der Parameter m charakterisiert in diesem Fall den Grad der Stochastik im Kampf um die Zellen.

- Im Grenzfall $m \rightarrow \infty$ erhalten wir die deterministische Grenze, die schon behandelt wurde: Die Zelle j wird in der nächsten Runde von einem C besetzt, wenn die größte Auszahlung aus $N(j)$ von einer C-Zelle kommt.
- Im entgegengesetzten Grenzfall, also für $m \rightarrow 0$ tritt eine zufällige Strömung auf: die Wahrscheinlichkeit, dass die Zelle j in der nächsten Runde von C oder D besetzt sein wird, hängt von den relativen Häufigkeiten von C und D in der gegenwärtigen Umgebung $N^*(j)$ von j ab- vollständig unabhängig von den erreichten Punkteständen der umgebenden Zellen.
- Für $m = 1$ sind die Auszahlungen linear gewichtet, den Punkteständen der relevanten Wettbewerber entsprechend. („proportional winning“).

Für kleinere Werte von b hängen die relativen Häufigkeiten der 2 Typen, nach einer großen Anzahl von Schritten, noch wesentlich von den Anfangsbedingungen ab; für größere b ist dieser Zusammenhang nicht mehr gegeben. Abb. 2.4.1 fasst die gewonnenen Erkenntnisse

zusammen: Die horizontale Achse repräsentiert den Parameter b , der den Vorteil des Defektierens gegenüber dem Kooperieren darstellt. Die vertikale Achse stellt den Parameter m , den Grad der Stochastizität im Wettstreit der Zellen, dar. Farbsymbolik im betrachteten Zeitpunkt t : Blaue Zellen sind C , die in $t-1$ bereits C waren $C_{t-1} \rightarrow C$

Rote Zellen: $D_{t-1} \rightarrow D$

Gelbe Zellen: $C_{t-1} \rightarrow D$

Grüne Zellen: $D_{t-1} \rightarrow C$

Das Schaubild zeigt den Zustand der Simulation des PD auf einem 80×80 -Gitter mit periodischen Randbedingungen, der Moore-Umgebung und mit Selbstinteraktion $|N^*(I)| = 9$ nach 200 Generationen in diskreter Zeit. Insbesondere sind Konfigurationen, die nur aus roten und blauen Zellen bestehen, statisch, während solche mit einer großen Anzahl an gelben und grünen Feldern auf eine große Dynamik der Evolution hinweisen.

Beobachtung: Für Werte von b , die nahe bei 1 liegen, wird die sich ergebende Struktur von Kooperatoren dominiert. Das entsprechende Bild ist vorwiegend blau. Im Fall verhältnismäßig großer b -Werte besteht das System hauptsächlich aus D ; das Bild ist (fast) vollkommen rot. Für eine große Bandbreite an dazwischen liegenden Werten für b bleiben C und D nebeneinander bestehen; weitgehend unabhängig von deterministischem oder stochastischem Aktualisieren, von symmetrischen oder irregulären Gittern und der Dimension des Gitters. Für relativ kleine b hängt das Verhältnis von C und D von den jeweiligen Anfangsbedingungen ab, während für große b -Werte die Häufigkeiten der Typen von den Startbedingungen im Wesentlichen unabhängig sind. Im Detail hängen diese Häufigkeiten natürlich von m ab.

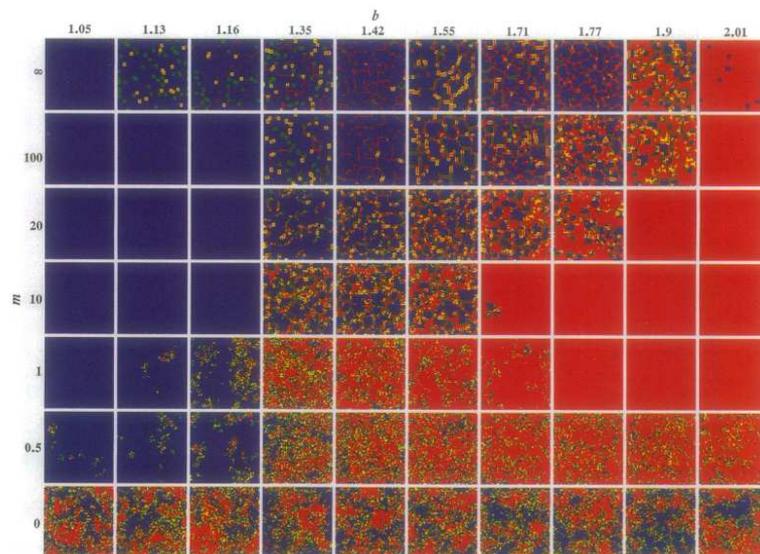


Abbildung 10: PD auf einem 80×80 -Gitter mit periodischen Randbedingungen, der Moore-Umgebung und mit Selbstinteraktion $|N^*(I)| = 9$ nach 200 Generationen in diskreter Zeit

2.4.2 Betrachtung des dynamischen Prozesses in kontinuierlicher Zeit;

Hier werden die Zellen sequentiell aktualisiert: in jeder Runde wird eine einzelne Zelle zufällig ausgewählt und alle relevanten Punktstände in ihrer Umgebung ermittelt. Dann wird je nach Gewinnregel die erfolgreichste Strategie in der Umgebung der Zelle ermittelt und die Zelle wird sofort aktualisiert.

Abb.2.4.2 stellt eine Simulation mit den gleichen Voraussetzungen wie in Abb.2.4.1 dar, jedoch in kontinuierlicher Zeit. Die Ergebnisse sind denen der diskreten Zeit qualitativ ähnlich

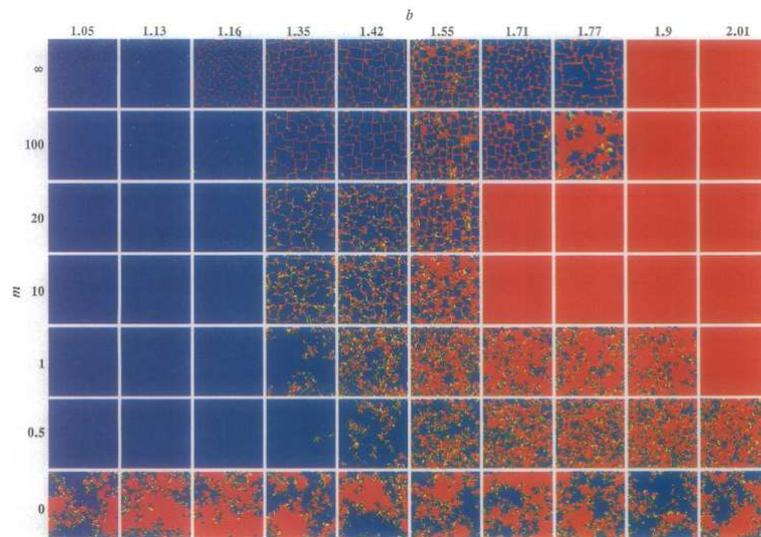


Abbildung 11: Wie Abb.2.4.1, mit sequentiellm Updating

2.4.3 Räumliche Zufallsverteilung der Zellen/Unregelmäßigkeiten

Räumliche Verteilungen, die in der Natur vorkommen, weisen nur sehr selten eine strikte Symmetrie auf. Um diesem Zustand zu begegnen, werden die einzelnen Zellen oder Spieler zufällig auf einer Ebene verteilt. Die Umgebung einer Zelle wird als die Menge von Zellen, die innerhalb eines bestimmten Radius r um die betrachtete Zelle liegen, definiert. Damit können Zellen unterschiedlich viele Nachbarn besitzen, mit denen sie interagieren. Beispielsweise kann auf einem Raster ein bestimmter Prozentsatz der Zellen „aktiviert“ werden, in denen man ihnen feste Strategien/Individuen zuordnet. Die Restlichen Zellen bleiben leerer Raum. Nun kann man einen Interaktionsradius festlegen, innerhalb dessen die Zellen/Strategien gegeneinander kämpfen.

2.5 Vergleich des räumlichen PD mit Conways „Game of Life“

2.5.1 Beschreibung des „Game of Life“ Conways

Im Game of Life gibt für die Zellen eines gewählten Gitters 2 Zustände: aktiv/lebendig und passiv/gestorben. Man verwendet die Moore-Nachbarschaft für jede Zelle I des Gitters und betrachtet deren aktive direkte Nachbarn. Je nach deren Anzahl ist I in der nächsten Generation lebendig oder tot.

Definiere: M_I = Anzahl der aktiven Nachbarn der Zelle I.

Betrachte eine aktive Zelle I: Hat I „zu wenig“ Nachbarn, $0 \leq M \leq 2$, so stirbt die Zelle an „Einsamkeit“ und ist folglich in der nächsten Generation tot. Bewegt sich die Anzahl der aktiven Nachbarn in einem Rahmen von $\{3,4,5\}$, so bleibt die Zelle in der nächsten Runde aktiv. Ist die Anzahl der Nachbarn von I aber „zu groß“, so stirbt die Zelle an „Überbevölkerung“. Entsprechende Überlegungen für eine passive Zelle.

2.5.2 Unterschiede und Gemeinsamkeiten

- Im Game of Life bestimmen nur die 9 Zellen der Moore-Nachbarschaft $N^*(I)$ das Schicksal der Zelle in der nächsten Generation. Im räumlichen PD hingegen sind bei Verwendung der Moore-Nachbarschaft 25 Zellen für den Übergang einer Zelle in die nächste Generation relevant.
- Die Muster im räumlichen PD zeigen eine Kombination aus Komplexität und zugrunde liegender Regularität, ganz anders als dies bei zellulären Automaten, wie dem Game of Life beobachtet wird.
- Sowohl im Game of Life, als auch im räumlichen PD ergeben sich spezielle Objekte, wie z.B. Blinker, Eater, ...

2.6 Anmerkungen zur Simulation

In diesem Beispiel wurde ein einfaches Gefangenendilemma als Spatial Game behandelt. Der Raum war ein 2-dimensionales Gitter, die Stochastik bei der Übernahme von Strategien war ausgeschaltet ($m \rightarrow \text{inf}$). Dies führte zu scharfen Übergangspunkten, innerhalb deren Grenzen das System die gleiche Dynamik aufweist. Eine Betrachtung der Dynamik bei Invasionen ergab schließlich, dass sich in einem Bereich von $\frac{8}{5} < b < \frac{5}{3}$ ein dynamisches Gleichgewicht einstellt. In diesem Bereich konnten beide Strategien unendlich lang existieren. Generell zeigte sich bei Variationen von b eine sehr unterschiedliche Dynamik des Systems. Für die Spieltheorie ist jedoch die Betrachtung von größeren Systemen und deren Statistik von Bedeutung.

Die Simulationen wurden mit einer eigens entwickelten Software gerechnet. Diese ermöglichte es, Bilder und Filme zu erzeugen um sie in das Dokument einbetten zu können. Dem interessierten Leser steht ein Java-Applet im Internet zur Verfügung. Es ist unter <http://lorax.fas.harvard.edu/virtuallabs/> zu finden.

3 Das Falke-Taube-Spiel als Spatial Game

3.1 Betrachtung des räumlichen Falke-Taube-Spiels

3.1.1 Untersuchung des Basisspiels

Ein Individuum in diesem Spiel kennt 3 Verhaltensmuster, „Auftreten (display)“, „Eskalieren (escalate) = Angreifen“ und „Rückzug (retreat)“. Je nachdem, ob es sich bei dem Individuum um eine Taube oder einen Falken handelt werden diese Verhaltensmuster unterschiedlich häufig durchgeführt.

- Maxime des Falkens (H): Kämpfen, bis er selbst verletzt ist oder sich der Gegner zurückzieht.
- Maxime der Taube (D): Auftreten, sofort Zurückziehen, wenn der Gegner zum Angriff übergeht.

Jeder Akteur kann sich in dem Spiel zwischen den 2 Strategien „Falke“ und „Taube“ entscheiden.

Anfangsbedingungen: Falke und Taube gehen je mit einem Nutzen von 1, beispielsweise einem Revier der Größe 1ha, in den Kampf, beide sind unverletzt.

Annahme: *Zwei Tiere einer Gattung sind gleich stark*

Es ergeben sich folgende Szenarien:

- Treffen Falke und Taube aufeinander, so geht der Falke zum Angriff über und die Taube flieht vor ihm. Der Falke hat also sein Revier verteidigt und das der Taube erobert und erhält die Auszahlung 2, die Taube geht als Verlierer aus diesem Aufeinandertreffen und erhält folglich die Auszahlung 0.
- Treffen zwei Tauben aufeinander, so wird keine von beiden angreifen, es findet kein Kampf statt. Also bleiben beide unverletzt und behalten ihr ursprüngliches Revier. Daher erhält jede die Auszahlung 1.
- Treffen hingegen 2 Falken aufeinander, so greifen sie sich an. Der Kampf endet unentschieden. Da die Tiere gleich stark sind, werden beide in gleichem Maße verletzt, behalten jedoch ihr Revier. Somit erhalten sie die Auszahlung $1-\beta$. Der Parameter β ist folglich ein Maß für den Schaden, den sich die Falken gegenseitig zufügen, oder die Kosten, die durch die Strategiewahl (H, H) verbunden sind.

Mit diesen Überlegungen ergibt sich folgende Bimatrix des zugehörigen, symmetrischen Basisspiels:

	H	D
H	$(1-\beta)$	2
D	0	1

$$\text{also: } E = \begin{array}{|c|c|} \hline (1-\beta, 1-\beta) & (2, 0) \\ \hline (0, 2) & (1, 1) \\ \hline \end{array}$$

Betrachtung von gemischten Strategien:

Wahrscheinlichkeit		q	1-q
		H	D
p	H	(1-β, 1-β)	(2, 0)
1-p	D	(0, 2)	(1, 1)

Die Lösung des klassischen Falke-Taube-Spiels:

- **Fall 1)** Ist $\beta > 1$, so ist weder H noch D eine ESS In diesem Fall wäre die einzige ESS die gemischte Strategie:
„wähle H mit Wahrscheinlichkeit p und D mit Wahrscheinlichkeit 1-p, wobei $p = 1/\beta$ “.
- **Fall 2)** Ist $\beta < 1$, so ist H die einzige ESS

Beweis

Fall 1) Ist $\beta > 1$, so ist $(1-\beta) < 0$. Die Strategiekombinationen (D, H) und (H, D) sind Nash-GG in reinen Strategien. Wir betrachten die Auszahlung an Spieler 1, wenn dieser mit Wahrscheinlichkeit p die Strategie H und mit Wahrscheinlichkeit 1-p die Alternative D wählt. entsprechend entscheidet sich Spieler 2 mit Wahrscheinlichkeit q bzw. 1-q für H bzw. D.

$$\begin{aligned}
 U(p, q) &= pq(1 - \beta) + p(1 - q)2 + (1 - p)(1 - q)1 \\
 &= pq - pq\beta + 2p - 2pq + 1 - p - q + pq \\
 &= pq(1 - \beta - 2 + 1) + p + 1 - q \\
 &= p(1 - q\beta) + 1 - q
 \end{aligned}$$

Für $1 - q\beta > 0$, also $q\beta < 1$ bzw. $q < 1/\beta$ ist $p = 1$ beste Antwort
 $= 0$, also $q = 1/\beta$ ist $0 \leq p \leq 1$ beste Antwort
 < 0 , also $q > 1/\beta$ ist $p = 0$ beste Antwort

also ist die Strategie „Wähle H mit Wahrscheinlichkeit $1/\beta$ “ mit jedem Wert für p aus $[0, 1]$ beste Antwort auf die Strategie $q = 1/\beta$ von Spieler 2

Wegen der Symmetrie der Auszahlungen gilt das entsprechend für Spieler 2:

$$\begin{aligned}
 U(p, q) &= pq(1 - \beta) + (1 - p)q2 + (1 - p)(1 - q)1 \\
 &= q(1 - p\beta) + 1 - p
 \end{aligned}$$

Für $1 - p\beta > 0$, also $p < 1/\beta$ ist $q = 1$ beste Antwort
 $= 0$, also $p = 1/\beta$ ist $0 \leq q \leq 1$ beste Antwort
 < 0 , also $p > 1/\beta$ ist $q = 0$ beste Antwort

Damit erhalten wir mit der Strategiekombination, in der beide Spieler die gemischte Strategie $(1/\beta, 1-1/\beta)$ spielen ein symmetrisches Nash-GG. Nun ist zu überprüfen, ob es sich hierbei sogar um eine ESS handelt.

Satz: Ist eine Strategiekombination (s^*, s^*) ein symmetrisches Nash-GG im symmetrischen Zweipersonenspiel mit Auszahlungsfunktion U , so handelt es sich bei s^* genau dann um eine ESS, wenn gilt:

$$\forall s \neq s^*, s \in r(s^*) : U(s^*, s) > U(s, s)$$

mit $r(s^*) =$ Menge der besten Antworten auf die Strategie s^* . Wie bereits gezeigt sind für den 1. Spieler alle p aus $[0,1]$ beste Antwort auf die gemischte Strategie $s^* = (1/\beta, 1-1/\beta)$ seines Gegners.

Also muss für alle gemischten Strategien $s = (x, 1/x)$ mit $x \neq 1/\beta$ gelten:

$$U_1(1/\beta, x) > U_1(x, x) \Leftrightarrow U_1(1/\beta, x) - U_1(x, x) > 0$$

Das überprüfen wir:

$$\begin{aligned} U_1(1/\beta, x) &= (1/\beta)x(1 - \beta) + (1/\beta)(1 - x)2 + (\beta - 1/\beta)(1 - x) \\ &= x(1 - \beta/\beta) + (2/\beta) - (2/\beta)x + (\beta - 1/\beta) + (1 - \beta/\beta)x \\ &= x(2 - 2\beta)/\beta - (2/\beta)x + (2 + \beta - 1/\beta) \\ &= -2x + 1 + 1/\beta \\ U_1(x, x) &= x(1 - \beta) + 2x(1 - x) + (1 - x) \\ &= x(1 - \beta) + 2x - 2x + 1 - 2x + x \\ &= -\beta x + 1 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} U_1(1/\beta, x) - U_1(x, x) &= \beta x - 2x + 1/\beta \\ &= \beta(x - (2/\beta)x + 1/\beta) = \beta(x - (1/\beta)) > 0 \text{ für alle } x \neq 1/\beta \end{aligned}$$

wegen $\beta > 0$ nach Voraussetzung.

Also ist $(1/\beta, 1-(1/\beta))$ eine ESS für das Falke-Taube-Spiel. $(1/\beta, 1/\beta)$ ist das zugehörige, symmetrische Nash-GG in gemischten Strategien.

Fall 2) Ist $0 < \beta < 1$, so ist $1 - \beta > 0$. Folglich macht die allgemein berechnete Strategie $(1/\beta, 1-1/\beta)$ keinen Sinn mehr, da ja $1/\beta > 1$ und das ist ein Widerspruch zur Definition der Komponenten der Strategie als relative Häufigkeiten, mit der Teilstrategien gewählt werden.

Wahrscheinlichkeit		q	1-q
		H	D
p	H	(1-β, 1-β)	(2, 0)
1-p	D	(0, 2)	(1, 1)

Das bedeutet, dass das betrachtete Basisspiel kein GG in strikt gemischten Strategien hat. Es besitzt nur noch das symmetrische Nash-GG (H, H) in reinen Strategien bzw. (1, 1), also $p = 1$ und $q = 1$ in der gemischten Erweiterung. Nun können wir überprüfen, ob (1, 0) auch eine ESS ist.

Wir betrachten wieder den Nutzen des ersten Spielers, wenn der Gegner diese Strategie, also $q = 1$ verfolgt.

Wahrscheinlichkeit		1	0
		H	D
x	H	(1-β, 1-β)	(2, 0)
1 - x	D	(0, 2)	(1, 1)

$$U_1(x, 1) = x1 * 1 - \beta) + (1 - x)0 = x(1 - \beta)$$

daraus sieht man, dass die einzige beste Antwort des 1. Spielers auf die Strategie $q = 1$ ($= s^*$) ebenfalls die Strategie „wähle immer H“, also $x = 1$ ist. Dementsprechend ist $r(s^*) = \{s^*\}$ und die Bedingung für die ESS ist trivialerweise erfüllt. Damit ist $s^* = (1, 0)$ eine ESS und (s^*, s^*) ein symmetrisches Nash-GG.

3.1.2 Ausweitung des Basisspiels auf den Raum

Ansatz zur räumlichen Ausweitung des klassischen evolutorischen Spiels

Die räumliche Verallgemeinerung der evolutionären Spiele ist ein endlicher zellulärer Automat. Solche Systeme zeigen oft ein komplexes, selbstorganisiertes Verhalten. Dementsprechend ist von der räumlichen Ausweitung eines evolutionären Spiels anzunehmen, dass sie im Allgemeinen ein qualitativ anderes Verhalten und damit unterschiedliche Ergebnisse zeigt, als dies im entsprechenden klassischen Spiel der Fall ist. Die räumliche Struktur kann es einer Strategie ermöglichen, zu wachsen, wenn dies aus Sicht der klassischen evolutionären Spieltheorie nicht zu erwarten ist.

Räumlichen Ausweitung des Falke-Taube-Spiels

Die Strategiemenge Σ ist die des Basisspiels. Gemischte Strategien sind nicht zulässig. Ein Individuum kann in jeder Runde entweder als Falke oder als Taube agieren. Λ ist ein quadratisches, ebenes $n \times n$ -Gitter. $N(I)$ sei die Moore-Nachbarschaft, die für jede Zelle I aus Λ die Interaktion mit den 8 I umgebenden Zellen betrachtet. Außerdem wählt man periodische Randbedingungen, um keinen Unterschied zwischen Zellen im „Inneren“ und am „Rand“ von Λ zu machen.

Im Allgemeinen wird für $\beta < 1$ jede anfängliche Konfiguration von Falken und Tauben nach

einer endlichen Anzahl an Wiederholungen ausschließlich aus Falken bestehen. In diesem Fall sind die Ergebnisse des klassischen Spiels mit denen der räumlichen Version identisch. Gleichsam gilt: ist β sehr groß, so wird jede anfängliche Menge an Falken und Tauben nach einer endlichen Anzahl an Runden des klassischen wie des räumlichen Spiels nur noch aus Tauben bestehen. Jedoch gibt es β -Werte innerhalb dieser extremen Grenzen, für die substantielle Unterschiede zwischen dem klassischen Spiel und dessen räumlicher Version auftreten.

Um diese Effekte zu betrachten, bezeichnet man mit h den Anteil der Falken an der Gesamtpopulation, die nur aus Falken und Tauben besteht.

Ein wichtiges Ergebnis ist, dass der Anteil an Falken in dem räumlichen Spiel im Allgemeinen niedriger als im klassischen Spiel ist.

Das untersuchte räumliche Falke-Taube-Spiel hat gezeigt, dass die räumliche Struktur zu einer Reihe von Zuständen oder Phasen führt, in denen die Anteile von den beiden Typen annähernd konstant bleiben. Zwischen diesen Zuständen gibt es für bestimmte β -Werte plötzliche Phasenübergänge.

3.2 Variationen

Nach der allgemeinen Definition der Spatial Games sind für eine konkrete Fragestellung zu wählen:

1. Das **Basisspiel** mit der zugehörigen, endlichen Menge an Strategien Σ und der Auszahlungsmatrix E
 - Das (symmetrische) Falke-Taube-Spiel
 - Das (symmetrische) Falke-Taube-Rückschlag-Kämpfer-Spiel
 - Das Gefangenendilemma, ...
2. Das **Gitter** Λ im n -dim. Raum
 - kontinuierlich $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Hier definiert eine Norm die Nachbarschaft
 - diskret
 - Raster
 - * 2-dim. Matrix
 - * n -dim. Array
 - Hexagonale Anordnung
3. Die **Nachbarschaft** $N^*(I)$ bzw. $N(I)$ jeder Zelle I aus Λ (im diskreten Fall)
 - nach **Moore**: die 8 umgebenden Zellen jeder Zelle
 - nach **von Neumann**: die 4 Zellen über, unter, rechts und links jeder Zelle

- im Hexagonalen Feld: die 6 direkten Nachbarzellen

4. Die **Randbedingungen** für das Gitter Λ

- **feste** Randbedingungen: Zellen die am Rand des Gitters (beachte: endliche Anzahl an Zellen!) liegen, haben weniger Nachbarn als Zellen im „Inneren“ von Λ
- **periodische** Randbedingungen: die Zellen an den Rändern von Λ werden mit den Zellen an den gegenüber liegenden Rändern verbunden (vgl.: Torus aus einem zweidimensionalen Gitter) Λ hat in diesem Fall keinen Anfang und kein Ende; jede Zelle hat gleich viele Nachbarn.

5. Die **Updating-Regeln**

- **gleichzeitiges** Updating aller Zellen
 - zu diskreten Zeitpunkten
 - in kontinuierlicher Zeit (die Zellen werden nacheinander einzeln upgedatet)
- **stochastische Updating-Regeln**
 - zufällige Auswahl der Zellen, die aktualisiert werden
 - Update mit Störanfälligkeit: Man wählt einen Parameter α , der die Wahrscheinlichkeit darstellt, mit der es einer Zelle nicht gelingt, die in t erfolgreichste ihrer Nachbarstrategien für sich selbst für Runde $t+1$ zu adaptieren, sondern bei ihrer eigenen, weniger erfolgreichen Strategie verbleibt. Somit ist α ein Richtmaß für das „Fehlverhalten“ von Zellen.

6. Vergleich der Punktestände der Zellen innerhalb der Umgebung einer Zelle

- Verhalten bei **Punktgleichstand** innerhalb einer Nachbarschaft
 - **deterministisches** Vorgehen
treten in der Nachbarschaft einer Zelle zwei unterschiedliche Strategien mit dem gleichen maximalen Punktestand aus den Kämpfen mit deren entsprechenden Nachbarn auf, so bleibt das Zentrum der Nachbarschaft unverändert.
 - stochastisches „tie-breaking“
- **Gewichtung der Auszahlung** aus dem Kampf der Zelle mit sich selbst

7. Startkonfiguration

- Prozentualer **Anteil** der Typen an der Anfangsmenge (z.B. 50% Tauben, 50% Falken)
- **Verteilung** der Akteure auf dem Gitter
 - deterministisch: bei symmetrischer Wahl sind entstehen regelmäßige, symmetrische Formen , z.B. „Perserteppiche“

- stochastisch (Zufällige Verteilung der Strategien auf dem Gitter)
- Zulassung von Zellen, die von keiner Strategie besetzt werden

8. Anzahl der betrachteten Iterationen

Bei dem Spiel Falke-Taube zusätzlich:

- Wahl des Parameters β

3.3 Hinzunahme neuer Strategien in das H-D-Spiel

Eine weitere Möglichkeit der Variation des einfachen Falke-Taube-Spiels ist die Einführung neuer Strategietypen, beispielsweise Retaliator (R) und Bully (B). Der Retaliator zeichnet sich dadurch aus, dass er grundsätzlich imponiert, jedoch nur angreift, wenn dies der Gegner tut. Die Bully-Strategie sieht folgendermaßen aus: Sofortiger Angriff des Gegners; Rückzug, wenn dieser sich nicht zurückzieht, sondern ebenfalls angreift.

3.3.1 Hawk-Dove-Retaliator

Der Parameter $\varepsilon \geq 0$ wurde von Zeeman eingeführt, um zu verdeutlichen, dass im R beim Aufeinandertreffen mit D erkennen könnte, dass D niemals angreift und diese Tatsache ausnutzt.

Im R-D- Wettstreit, könnte H den Vorteil des früheren Angriffs haben, da ja R nur zurückschlägt. Der Fall $\varepsilon = 0$ beschreibt dann das ursprüngliche, von Maynard Smith und Price vorgeschlagene Modell.

Auszahlungsbimatrix des 3-Strategien-Spiels (H, D, R)

	H	D	R
H	$(1-\beta, 1-\beta)$	$(2, 0)$	$(1-\beta+\varepsilon, 1-\beta-\varepsilon)$
D	$(0, 2)$	$(1, 1)$	$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
R	$(1-\beta-\varepsilon, 1-\beta+\varepsilon)$	$(1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$	$(1, 1)$

Ergebnisse des klassischen Spiels

Für $\varepsilon = 0$ ist die einzige ESS ein Polymorphismus von H und D.

Für $\varepsilon > 0$ existieren zwei verschiedene ESS: Eine reine Strategie R und ein H-D-Polymorphismus.

Ergebnisse des räumlichen Spiels

Für $\varepsilon = 0$ ist der endgültige Zustand im Wesentlichen eine Mischung aus R und D.

Für $\varepsilon > 0$ überleben nur R.

	ε	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon > 0$
ESS des			
... klassischen Spiels		H – D Polymorphismus	H-D - PolymorphismusR;
...räumlichen Spiels		R – D Polymorphismus	R

3.3.2 Hawk-Dove-Retaliator-Bully

Auszahlungs-Bimatrix des 4-Strategien-Spiels:

	H	D	R	B
H	$(1-\beta, 1-\beta)$	$(2, 0)$	$(1-\beta+\varepsilon, 1-\beta-\varepsilon)$	$(2, 0)$
D	$(0,2)$	$(1,1)$	$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$	$(0,2)$
R	$(1-\beta-\varepsilon, 1-\beta+\varepsilon)$	$(1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$	$(1,1)$	$(2, 0)$
B	$(0,2)$	$(2, 0)$	$(0,2)$	$(1,1)$

Also: E =

$(1-\beta, 1-\beta)$	$(2, 0)$	$(1-\beta+\varepsilon, 1-\beta-\varepsilon)$	$(2, 0)$
$(0,2)$	$(1,1)$	$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$	$(0,2)$
$(1-\beta-\varepsilon, 1-\beta+\varepsilon)$	$(1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$	$(1,1)$	$(2, 0)$
$(0,2)$	$(2, 0)$	$(0,2)$	$(1,1)$

Ergebnisse des klassischen Spiels

Für $\varepsilon = 0$ gibt es keine ESS. Stattdessen weist das System einen unendlichen Zyklus auf:

$$R \rightarrow \text{H-D Koexistenz} \rightarrow \text{H-B Koexistenz} \rightarrow R$$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es zwei ESS: eine reine R-Strategie und eine H-B Mischung.

Ergebnisse des räumlichen Spiels

Für $\varepsilon = 0$ ist die Lösung des räumlichen Spiels eine reine R-Strategie, außer wenn $\beta > 1$ ist; dann können (abhängig von der Startkonfiguration) D unter den R überleben.

Für $\varepsilon > 0$ ist R die einzige ESS.

	ε	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon > 0$
ESS des			
... klassischen Spiels		--- (unendlicher Zyklus)	H-B - Polymorphismus; R
... räumlichen Spiels		R (außer $\beta > 1$)	R

3.4 Graphische Analyse des Falke-Taube Spiels

3.4.1 Vergleich mit der klassischen evolutorischen Version

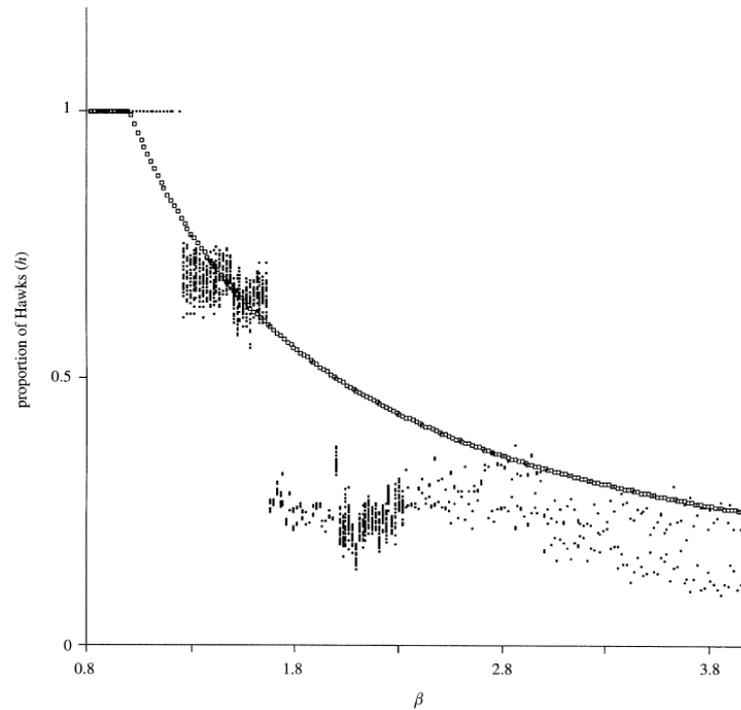


Abbildung 12: Variation des Falken-Anteils h als Funktion von β . Die Punkte stellen das räumliche Spiel und die Rechtecke das klassische evolutorische der. Das räumliche Spiel wurde auf einem 70x70 Gitter berechnet, mit zufälliger Startkonfiguration. Die Rechnung umfasste 175 Generationen, wobei hier nur die letzten 25 dargestellt wurden.

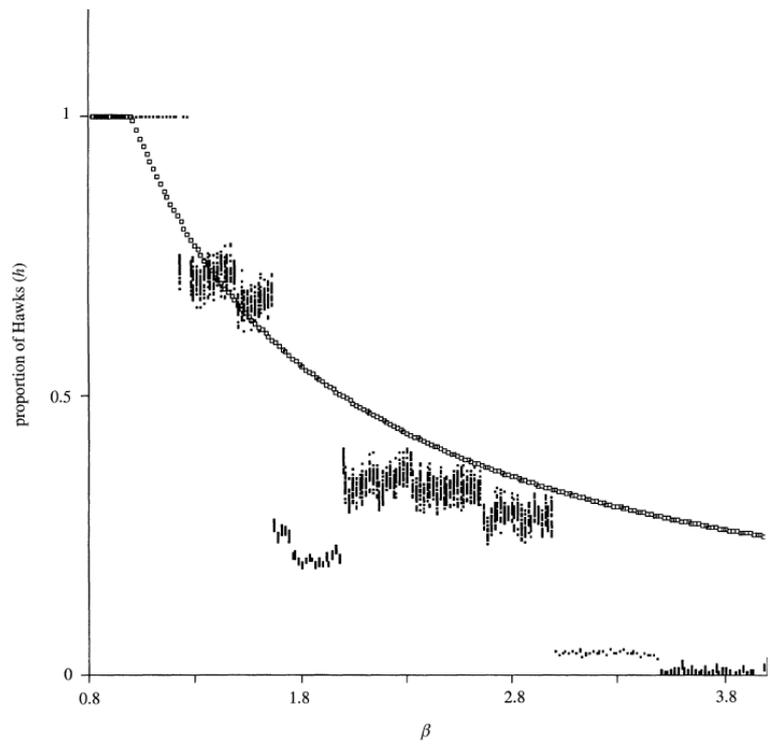


Abbildung 13: Variation des Falken-Anteils h als Funktion von β mit einem Fehler von 5% beim Aktualisieren der Zellen. Ansonsten alles wie in Abb.3.4.1

3.4.2 Analyse des räumlichen H-D-R-Spiel

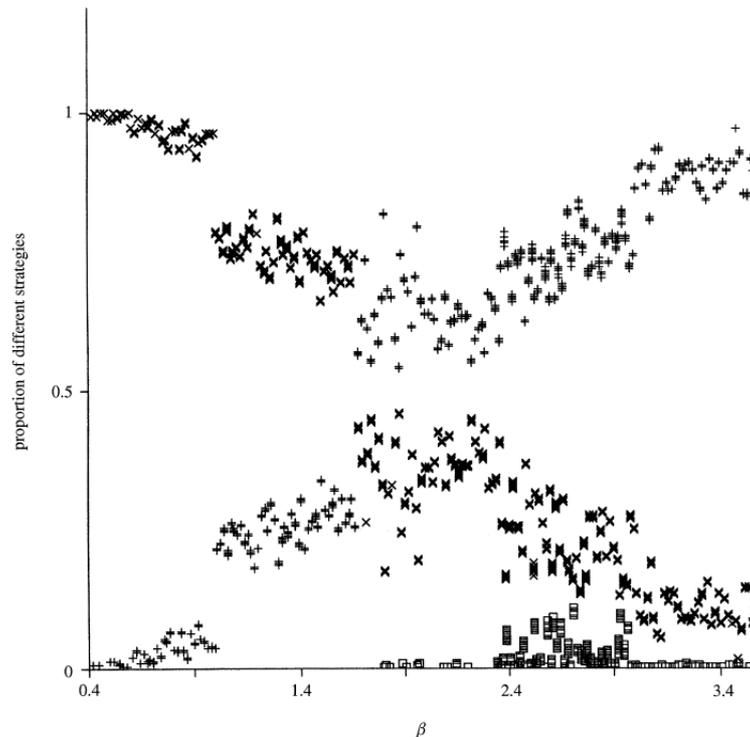


Abbildung 14: Die Anteile von Falken (Rechtecke), Tauben (Pluszeichen), Retaliator (Kreuze) im räumlichen Spiel (mit $\epsilon = 0$). Das räumliche Spiel wurde auf einem 70×70 Gitter berechnet, mit zufälliger Startkonfiguration. Die Rechnung umfasste 150 Generationen, wobei hier nur die letzten 10 aufgetragen wurden.

4 Zusammenfassung

In Spatial Games sind die Mitglieder einer Population räumlich angeordnet. In jeder Runde spielt jedes Mitglied gegen alle seine Nachbarn und ändert ggf. seine Strategie für die nächste Runde, abhängig von der Strategie seiner Nachbarn. Bei den Spatial Games treffen zwei Theorien erstmals aufeinander: die der (evolutionären) *Spieltheorie* und die der *zellulären Automaten*. In Kap.2 und Kap.3 wurden bekannte spieltheoretische Problemstellungen als Spatial Game behandelt: das Gefangenendilemma sowie das Falke-Taube Spiel. Während im Gefangenendilemma das Augenmerk auf die Methodologie gelegt wurde, standen beim Falke-Taube Spiel die Ergebnisse von Simulationen und der Vergleich der Ergebnisse mit denen der klassischen Spieltheorie im Vordergrund. Es zeigten sich qualitative Unterschiede zwischen den beiden Herangehensweisen. Im Allgemeinen können Strategien im räumlichen Fall (ko-)existieren, wenn es im klassischen Fall so nicht möglich wäre. Die Spatial Games stellen somit eine sinnvolle Erweiterung der evolutionären Spieltheorie dar. Anwendung fin-

den die Spatial Games v.a. in der theoretischen Biologie. Interessant ist auch der Vergleich mit der statistischen Mechanik. Hierbei werden Spieler, die ihre Auszahlung maximieren, mit Teilchen verglichen, die ein niedriges Energieniveau anstreben.

Literatur

- [1] Nowak, M.A , May, R.M. 1992 Evolutionary Games and spatial Chaos. *Nature, Lond.* 379, 826-829
- [2] Nowak, M.A, Bonhoeffer, S, May, R.M. 1994 Spatial Games and the maintenance of cooperation. *Proc. natn. Acad. Sci.* **91**, 4877-4881.
- [3] Nowak, M.A. 2006 Evolutionary Dynamics: exploring the equations of life. *Harvard University Press*
- [4] Killingback, T. Doebli, M. 1996 Spatial evolutionary Game Theory: Hawks and Doves Revisited. *Proceeding: Biological Sciences* **263**, 1135-1144

Listing 1: calSpGam

```
#!/usr/bin/ruby1.8
require 'rubygems'
require 'trollop'

class PrisonersDilemma

  def initialize( opts )
    return nil unless opts[:f]
    @transitions=opts[:c]
    @file=opts[:f]
    @print_payoff=opts[:p]
    @write=opts[:w]
    @count=0
    @colors={:C=>{:C=>"B",:D=>"Y"},:D=>{:C=>"G",:D=>"R"}}
    @b=opts[:b]
    @xrang = 0
    @yrang = 0
    @old_field = Array.new
    @curr_field = Array.new
    @payoff_mtx=[]
    @old_payoff_mtx=[]
    @payoff={:C=>{:C=>1,:D=>0},:D=>{:C=>@b,:D=>0}}
    @item={:x=>0,:y=>0,:s=>d}
```

```

    @nbh=opts[:h]
    read_file
    @tmpdir="#{opts[:d]}_#{@nbh}_#{@b}"
    'mkdir #{@tmpdir}' if opts[:w]
end

def read_file
  File.open(@file, "r").each{|line|
    unless line =~ /^#.* /
      @curr_field.push line.chomp.split(" ").collect{|s| s.to_sym}.dup
    end
  }

  @yrang=@curr_field.length
  @xrang=@curr_field[0].length
  @payoff_mtx = Array.new(@yrang){[]}
end

def moore_nbhood(x,y, arr)    #Moore neighbourhood with periodical bounda
  ix=[]
  iy=[]
  ix[0] = (x==0)? @xrang-1 : x-1
  ix[1] = x
  ix[2] = (x==@xrang-1)? 0 : x+1

  iy[0] = (y==0)? @yrang-1 : y-1
  iy[1] = y
  iy[2] = (y==@yrang-1)? 0 : y+1
  re = ix.collect{|j| iy.collect{|i| arr[i][j] unless (j==x and i==y)} }
  re.flatten!
  re.delete nil
  re
end

def neumann_nbhood(x,y, arr)    #Neumann neighbourhood with periodical bo
  points=[]

  ix = (x==0)? @xrang-1 : x-1
  points.push [ix,y]

```

```

ix = (x==@xrang-1)? 0 : x+1
points.push [ix,y]

iy = (y==0)? @yrang-1 : y-1
points.push [x,iy]

iy = (y==@yrang-1)? 0 : y+1
points.push [x,iy]

re = points.collect {|j,i| arr[i][j] unless (j==x and i==y)}
re.flatten!
re.delete nil
re
end

def cal_nbhood(x,y, arr)
  return neumann_nbhood(x,y, arr) if @nbh=="neumann"
  return moore_nbhood(x,y, arr)   if @nbh=="moore"
end

def do_step
  write2mtx if @write
  write2gp  if @write

  @old_field = @curr_field.collect {|i| Array.new i}
  @old_payoff_mtx = @payoff_mtx.collect {|i| Array.new i}
  #calculate payoffs
  0.upto(@xrang-1){|j| 0.upto(@yrang-1){|i|
    act=@old_field[i][j]
    nbhood=cal_nbhood(j,i,@old_field)
    payoff=0

    nbhood.each{|nb| payoff+= @payoff[act][nb] }
    @payoff_mtx[i][j]=payoff
  }}

  #set_new_strategies
  0.upto(@xrang-1){|j| 0.upto(@yrang-1){|i|
    act          = @payoff_mtx[i][j]
    nbhood_po    = cal_nbhood(j,i,@payoff_mtx)
    nbhood       = cal_nbhood(j,i,@old_field)

```

```

        max      = nbhood_po.index( nbhood_po.max )
        @curr_field[i][j] = nbhood[max] if nbhood_po[max]>act
    }}
    @count+=1
end

```

```

def plot
  puts "--#{@count}"
  @curr_field.each{|i| puts i.to_s.gsub(/C/, "#").gsub(/D/, " ")}
end

```

```

def write2mtx
  yc=0
  out=""
  File.open("#{@tmpdir}/#{sprintf"%05d" % @count}.mtx", "w"){ |o|
    @curr_field.each{|i|
      xc=0
      i.each{|ie|
        po=@payoff_mtx[yc][xc] if @payoff_mtx!=[]
        po="" if po==nil or po==0 or !@print_payoff
        out<< "#{ie}:#{po} "
        xc+=1
      }
      o.puts out
      out=""
      yc+=1
    }
  }
end

```

```

def write2gp
  yc=0
  File.open("#{@tmpdir}/#{sprintf"%05d" % @count}.gp", "w"){ |o|
    @curr_field.each{|i|
      xc=0
      i.each{|ie|
        color=@colors[ie][ie]
        color=@colors[ie][ @old_field[yc][xc] ] if @count>0 and @trans
        o.puts "#{xc} #{@yrang-yc} #{color}"
        xc+=1
      }
    }
  }
end

```

```

        }
      yc+=1
    }}
  end

end

opts = Trollop::options do
  banner <<-EOS
  A program to calculate the prisonersdilemma in spatial games
  Usage
    catSpGam.rb [options] -f filename
  where [options] are:
  EOS

  opt :b, 'ein wert fuer b (default 1.66)', :default=> 1.66
  opt :w, 'schreibe in dateien', :default=>nil
  opt :n, 'anzahl der Iterationen(20)', :default=>20
  opt :f, 'eingabedatei ', :default=>''
  opt :h, 'nachbarschaft(moore,neumann)', :default=>'moore'
  opt :s, 'silent mode', :default=>nil
  opt :d, 'verzeichnis fuer die output-files(filename)', :default=>''
  opt :c, 'Uebergaenge auch farbilch hervorheben', :default=>nil
  opt :p, 'auszahlung mit ausdrucken', :default=>nil
end
opts[:d]=opts[:f] if opts[:d]==''

dilemma = PrisonersDilemma.new(opts)

opts[:n].times do
  dilemma.do_step
  dilemma.plot unless opts[:s]
end

```