Kooperation und Bestrafung -Ein Schwarzfahrermodell der S-Bahn München GmbH

Biggel, Marcel (4036613)
Jordan, Philipp (4047642)
Wolter, Michael(4074067)

3. März 2009

Inhaltsverzeichnis

I Einführung und Modellbildung **3**

II Spieltheoretische Analyse **7**

1 Excel und der Input **7**

2 Lineare Optimierung **9**

3 Das Nash-Gleichgewicht **11**

4 Vollständige Kooperation **14**

5 Verbessertes Bestrafungssystem **17**

III Schwarzfahren -ja oder nein? **20**

IV Anhang: Formelsammlung **23**

Teil I
Einführung und Modellbildung

Im täglichen Leben begegnet man immer wieder den unterschiedlichsten Entscheidungssituationen, in denen jedes Mal aufs neue entschieden werden muss, wie man handelt!
Dies beginnt bereits beim Frühstück, ob man lieber einen Kaffee oder eher ein Glas Orangensaft bevorzugt, zieht sich dann auf dem Weg zur Arbeit/Universität hin (Fahrrad, UBahn, etc) und endet schließlich bei der Entscheidung, zu welcher Uhrzeit man sich schlafen legt.
Bei all diesen Vorgängen wird meist unterbewusst gehandelt und man richtet sich nach der Regel "Maximiere den eigenen Nutzen". Oftmals betreffen solche Entscheidungen aber nicht alleinig das Individuum, sondern haben auch Einfluss auf die Gesellschaft. Das betrifft gerade diejenigen Fälle, in denen man sich entscheiden muss, ob man an einer bestimmten Tätigkeit teilnimmt oder nicht. Wird daran teil genommen, so stellt sich die Frage, wie:
Nehmen wir an der Aktion kooperierend (bzgl der Allgemeinheit) teil? Je nach Wahl handeln wir egoistisch oder altruistisch. Laut Adam Smith gilt: "Auch für das Land selbst ist es keineswegs immer das schlechteste, dass der einzelne ein solches Ziel [das Wohl der Allgemeinheit] nicht bewußt anstrebt, ja, gerade dadurch, daß er das eigene Interesse verfolgt, fördert er häufig das der Gesellschaft nachhaltiger, als wenn er wirklich beabsichtigt, es zu tun."[1]
Ob ein solcher Egoismus der Nutzenmaximierung immer von Vorteil ist und welche Auswirkungen es auf die Gesellschaft hat, wird in dieser Projektarbeit spieltheoretisch anhand eines Schwarzfahrermodells der S-Bahn München GmbH untersucht.

Bei der Entscheidung das S-Bahn-System zu nutzen, gibt es zwei Handlungsalternativen: Man kann entweder den Fahrpreis dafür bezahlen oder schwarz fahren. Dabei kollidieren die Interessen des Einzelnen mit denen der Gruppe: Der einzelne Spieler in diesem Modell möchte seinen eigenen Nutzen maximieren und bevorzugt somit das Schwarzfahren. Die Allgemeinheit hingegen möchte das Beförderungssystem aufrecht erhalten, was zum zentralen Problem führt; verweigern zu viele Personen das Zahlen, so bricht das Beförderungssystem zusammen und keiner kann es mehr nutzen. Die spieltheoretischen Begriffe dazu sind wie folgt definiert:

[1] An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations, 1776 (dt.: Untersuchung über Wesen und Ursachen des Reichtums der Völker

Kooperatoren: Die Kooperatoren sind in dem Modell die zahlenden Gäste, die durch ihrer Kooperation das Beförderungssystem aufrecht erhalten wollen

Defektoren: Die Defektoren sind die Schwarzfahrer, die durch ihr Handeln ihr eigenes Interesse verfolgen, unabhängig von der Auswirkung auf die kooperierenden, zahlenden Fahrgäste

Bestrafer: Die Bestrafer sind die Kontrolleure, die benötigt werden, damit die Defektoren nicht überhand nehmen. Sie sorgen also dafür, dass das System trotz Defektoren nicht in sich zusammen bricht, indem sie versuchen die Schwarzfahrer aufzuspüren und sie bestrafen! Dabei ist zu beachten, dass es sich hierbei um eine altruistische Strafe handelt, da die Kosten für die Bestrafer von den Kooperatoren getragen werden muss (Personalkosten der Kontrolleure werden auf den Fahrpreis umgesetzt)

Nun stellt sich die spieltheoretische Frage, ob sich ein solches altruistisches Bestrafungssystem lohnt und ob es nicht bessere Alternativen zu dem Gegenwärtigen gibt.

Bei der Erstellung des Schwarzfahrermodells treffen wir nun auf die ersten typischen Schwierigkeiten, die bei jeder wirtschaftlich-mathematischen Modellbildung vorkommen:
Das Modell sollte exakt genug sein, um daraus sinnvolle Rückschlüsse auf die Realität ziehen zu können, allerdings darf es von der Vielfalt der davon abhängigen Faktoren nicht zu stark determiniert werden, als dass es den Rahmen der möglichen Berechnungen sprengt!
Wie so oft ist weniger die mathematische Betrachtung, sondern viel mehr die sinnvolle Gestaltung des Modells das Problem! Die ursprünglich nur als Datensammlung gedachte Excel-Tabelle stellte sich dann schnell als Hilfsmittel heraus, mit der das komplexe Datennetz an Input[2] , Berechnungen und Output in den Griff zu kriegen war. Zusammen mit der Formelsammlung im Anhang konnte somit ein übersichtliches Schwarzfahrermodell entwickelt werden, dessen wichtigste Annahmen nun dargestellt werden:

Die Struktur der S-Bahn wird sowohl lokal wie auch temporär unterteilt. Lokal in der Hinsicht, dass die ganzen S-Bahn-Äste zusammen gefasst werden, als würde es nur eine einzige Strecke geben. Wir rechnen also die Anzahl aller Fahrgäste jeder Linie auf eine einzige Linie um. Die verschiedenen Zonen bleiben größtenteils erhalten, jedoch wird Zone 3 und 4 zusammengefasst (Zone 4 beinhaltet nur den Flughafen sowie dessen Besucherpark) und die Stammstrecke S wird als eigener Abschnitt zwischen Donnersberger Brücke und Ostbahnhof definiert.

[2]Vielen Dank für die Zusammenarbeit an die S-Bahn München GmbH (Leiter Marketing und Vertrieb, Herr Hole), auf Grund deren der Realitätsbezug hergestellt werden konnte

Temporär unterteilen wir das S-Bahnsystem in die 3 Phasen des morgendlichen Berufsverkehrs von 5.00 - 10.00 Uhr, der leichten Flaute am Nachmittag zwischen 10.00 und 16.00 Uhr, sowie des abendlichen Berufsverkehrs von 16.00 bis 21.00 Uhr. Hintergrund ist, dass eine unterschiedliche Anzahl an Benutzern auch verschiedene Erfolgswahrscheinlichkeiten des Bestrafungssystems nach sich ziehen. Die Zeiteinteilung wurde festgelegt anhand mehrere Datenerhebungen seitens der S-Bahn München GmbH, und von uns hochgerechnet unter anderem anhand Abbildung 1[3]:

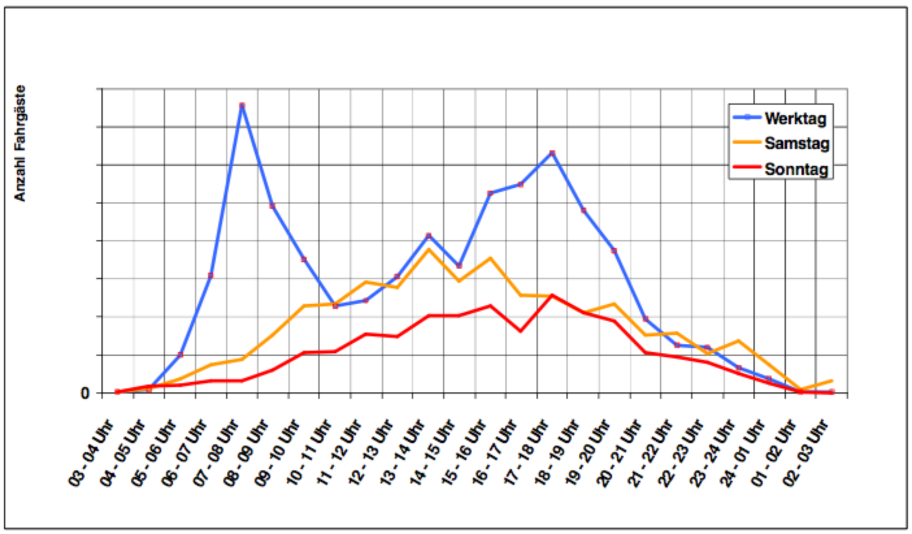

Abbildung 1: Tagesganglinien

Die Fahrgäste der zusammengelegten S-Bahnlinien werden ebenso pro Zone hochgerechnet[4] und wir gehen von einem durchschnittlichen Anteil an Monatskartenbesitzern von 75% aus (Monatskartenbesitzer können nicht schwarz fahren).

Unsere Bestrafer, die Kontrolleure, kontrollieren in Zweierteams zusammen und arbeiten eine 8 Std-Schicht pro Tag. Folglich erhalten wir zwei Schichten in unserem Modell (das nur die Uhrzeit von 5.00 bis 21.00 Uhr abdeckt), wobei die Anzahl der Arbeiter pro Zeitphase variabel bleibt. Einzige Bedingung an die Kontrolleure ist dabei, dass sich im Schnitt pro Zone über eine Zeitphase hinweg immer gleich viele Teams aufhalten. Das bedeutet, wenn ein Kontrollteam aus Zone j herausfährt, fährt ein anderes Team zeitgleich hinein!

Unsere Schwarzfahrerquote $\alpha_i(i \in \{S, 1, 2, 3\}]$ lassen wir variabel durch eine Antizipationskonstante z, woraus sich α_i nach folgender Funktion (in Abhängigkeit

[3] Verbundweite Verkehrserhebung 2001/2002 auf der S-Bahn München Band I, Mai 2005, S.35

[4] siehe Anhang, Formel (1)

der ebenso variablen Anzahl an Fahgästen und Kontrollteams) berechnen lässt:

$$\alpha_i = 1 - sin(\frac{\pi * \bar{\gamma}_i^z}{2})$$

mit $\bar{\gamma}_i$ als eine berechnete durchschnittliche Prüfquote[5].

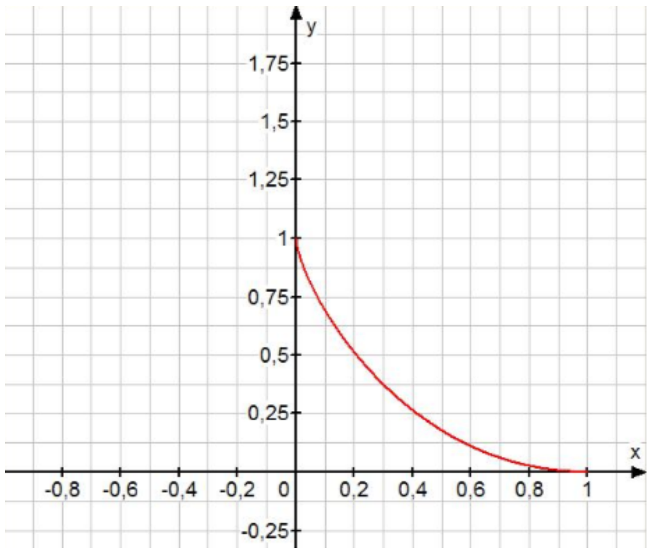

Abbildung 2: "$\alpha-$ Funktion"bzgl. z=0,7;
x-Achse $\hat{=}$ Prüfquote γ, y-Achse $\hat{=}$ Schwarzfahrerquote α

Unsere Schwarzfahrer erhalten also einen Lerneffekt zugesprochen, dessen Stärke durch die Konstante z($\in [0,3;1]$ zwecks Realitätsbezug) beeinflussbar ist; merkt ein Fahrgast, dass mehr Kontrolleure unterwegs sind, so fährt er mit geringerer Wahrscheinlichkeit schwarz! Dabei ist zu beachten, dass diese Funktion niemals genau die Realität wiedergeben kann, da sich die Schwarzfahrerquote offensichtlich nicht mathematisch exakt als Funktion darstellen lässt. Um sie aber sinnvoll zu gestalten, erfüllt sie die Bedingung, monoton fallend und konvex zu sein.

[5]siehe Anhang, Formel (4.1)

Teil II
Spieltheoretische Analyse

1 Excel und der Input

Wie bei der Modellannahme bereits erwähnt, wollen wir einige Ausgangsdaten variabel lassen. Damit man leichter bei den folgenden Untersuchungen erkennen kann, welche Veränderungen des Inputs sich wie stark auf den Output und den folgenden Analysen auswirken, stellte sich wiederum Excel als sehr hilfreich heraus.

Es wurde ein Eingabefenster eingerichtet, bei dem der Benutzer die Gesamtzahl der Fahrgäste, die Anzahl der Kontrollteams (aufgeteilt nach den Zonen S "Stamm", 1, 2, 3), die Antizipationskonstante z sowie die Anzahl q, wie oft ein Schwarzfahrer bereits erwischt wurde (darauf werden wir in Punkt II. 5 noch zurück kommen), eingeben kann. Ebenso stehen 5 Buttons zur Verfügung, welche die Makros ausführen, die dann die jeweiligen Berechnungen anhand der neuen Daten automatisch vornehmen und schließlich deren Ergebnisse in das Ausgabefenster kopieren.

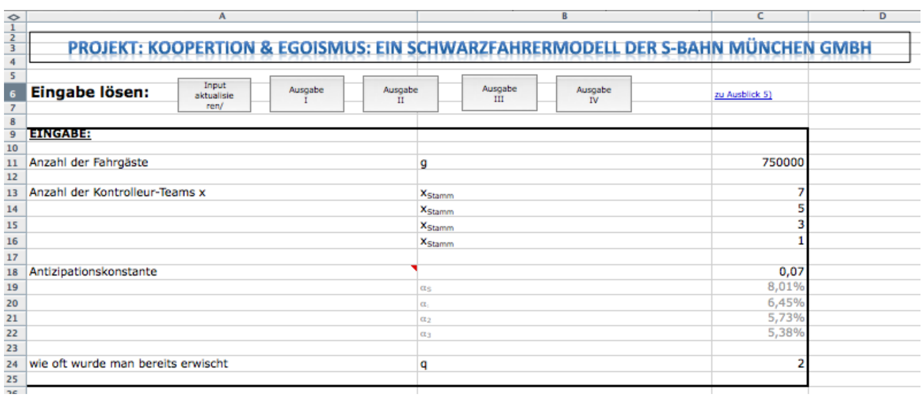

Abbildung 3: Das Eingabefenster

Das Ausgabefenster wurde minimal gehalten und zeigt nur die wichtigsten Ergebnisse an, um einen schnellen Überblick auf die Veränderungen zu gewährleisten. Genauere Ergebnisse (v.a. die Zwischenergebnisse bzgl. den einzelnen Zonen und Zeiteinheiten) können dann über einen Hyperlink unterhalb der Ausgabe erreicht werden. Es empfiehlt sich die Excel-Datei parallel zu dem hier geschriebenen Text zu nutzen, und erstmals die eingestellten Daten (die sich auf die Realität beziehen) zu verwenden, da sich darauf die nachfolgenden Resultate beziehen werden.

	E	F	G
6			***Input***
7			*Ergebnisse nach dem*
8			*Input*
9			
10	# Kontrolleur-Teams	x	16,0000
11			
12	Verteilung der Kontrolleure	v_S	43,75%
13		v_1	31,25%
14		v_2	18,75%
15		v_3	6,25%
16			
17	Prüfquote	γ_S	1,45%
18		γ_1	2,39%
19		γ_2	3,07%
20		γ_3	3,47%
21			
22	Schwarzfahrerquote	α_S	8,01%
23		α_1	6,45%
24		α_2	5,73%
25		α_3	5,38%
26			
27	Gesamtumsatz		1.008.399,04
28			
29	Umsatzsteigerung zum Optimum		
30			
31	neuer Fahrpreis (Ausgabe III)		-

Abbildung 4: Das Ausgabefenster des Inputs

Der erste Button "Input/Reset"gibt erstmal nichts weiter aus als die Ergebnisse der User-Eingabe. Sie zeigen die Situation der S-Bahn München gegeben den jeweilig festgesetzen Variablen. Hier sei nochmals erwähnt, dass die nähere Berechnungsweise im Anhang definiert ist.

2 Lineare Optimierung

Natürlich ist klar, dass die Eingabe des Users nicht vollständig perfekt sein wird. In Abhängigkeit von der Schwarzfahrerquote α_i auf den verschiedenen Zonen i, wird es jedoch eine optimale Verteilung $v = (v_S, v_1, v_2, v_3)$ der Kontrolleure geben, sodass am meisten Schwarzfahrer ertappt werden. Je mehr Schwarzfahrer erwischt werden, desto besser erfüllt das Bestrafungssystem seinen Sinn -die Fahrgäste zur Kooperation bewegen. Zudem wird die Schwarzfahrerquote stark in Abhängigkeit der Anzahl der Bestrafer x abhängen (der bereits angesprochene "Lerneffekt"), sodass neben der Verteilung v auch die Anzahl der Teams x optimiert werden sollte! Da die lineare Optimierung ein eigenes Projekt der Vorlesung Spieltheorie im Wintersemester 2008/09 darstellt, wird hier nur anhand eines einfach Beispiels darauf eingegangen:

Verteilung v \ Anzahl x	$x_1 = 13$	$x_2 = 26$
$v^1 = (0,4; 0,3; 0,2; 0,1)$	$(91, -2600)$	$(162, -5200)$
$v^2 = (0,6; 0,3; 0,1)$	$(150, -2600)$	$(270, -5200)$

Die Bimatrix zeigt uns zwei mögliche Verteilungen v^1, v^2 zweier unterschiedlicher Anzahl an Kontrollteams x_1, x_2. Zugrunde gelegt ist hierbei ein Input von 750.000 Fahrgästen, bei einer bisherigen Kontrollverteilung von 6:4:2:1 mit insgesamt 16 Kontrolleuren und den dazu gehörenden Schwarzfahrerquoten. Die zugehörige Auszahlung ist definiert als (a,b)=(Anzahl der erwischten Schwarzfahrer, Personalkosten). Es wird schnell klar, dass die Verteilung v^1 von v^2 streng dominiert wird, da bei gleichen Personalkosten mehr Schwarzfahrer erwischt werden.

Verteilung v \ Anzahl x	$x_1 = 13$	$x_2 = 26$
$v^2 = (0,6; 0,3; 0,1)$	$(150, -2600)$	$(270, -5200)$

Bleibt noch offen, für welche Anzahl an Kontrolleure man sich entscheiden sollte. Hier stellt sich die Frage, bei welchem Ergebnis die S-Bahn München GmbH ihren Gewinn maximieren kann. Ist es also besser geringere Personalkosten zu haben, oder geht man die höheren Personalkosten ein, um dafür mehr Defektoren zu erwischen? Die Antwort ergibt sich aus der Berechnung des Umsatzes der S-Bahn, in Abhängigkeit von x_1 und x_2[6]. In unserem Beispiel ergeben sich in etwa folgende Werte:

$$\text{Umsatz } \mathrm{U}(v^2, x_1) \approx 303.000$$
$$\mathrm{U}(v^2, x_2) \approx 305.000$$

[6] siehe Anhang, Formel (8)

Damit folgt für diesen einfachen Fall, dass die Kombination aus 26 Kontrollteams zu einer Verteilung von v^*=(60%, 30%, 10% und 0%) das beste Resultat zwischen Kooperatoren, Defektoren und Bestrafer darstellt.

Um nun ein optimales Ergebnis in unserem Modell zu erreichen, benötigt man die lineare Optimierung. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten die eingesetzen Kontrolleure auf die einzelnen Zonen zu verteilen, und man kann auch nicht sofort sagen, wie viele Kontrolleure man im besten Fall einsetzen sollte (zu wenig Kontrolleure $\Rightarrow$ zu viele Schwarzfahrer, zu viele Kontrolleure $\Rightarrow$ zu hohe Personalkosten).
In der Excel-Datei wird dieses Problem über das interne Solver-Programm mit nachfolgenden Nebenbedingungen gelöst:

- Zielvariable: Umsatz (wird maximiert)

- variabel: Anzahl der Kontrolleure deren Verteilung v_i

- Nebenbedingungen: $v_S, v_1, v_2, v_3 \geq 0, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$

Führt man nun in der Excel-Tabelle den Button "Ausgabe I" aus, so wird automatisch nach einer kurzen Berechnungszeit das beste Ergebnis anhand der linearen Optimierung ausgegeben.

	H	I
6		***AUSGABE I***
7		*optimales Ergebnis nach*
8		*der Realität*
9		
10	# Kontrolleur-Teams	24,8644
11		
12	Verteilung der Kontrolleure	51,64%
13		19,62%
14		19,31%
15		9,43%
16		
17	Prüfquote	2,66%
18		2,33%
19		4,91%
20		8,13%
21		
22	Schwarzfahrerquote	6,14%
23		6,53%
24		4,43%
25		3,18%
26		
27	Gesamtumsatz	1.010.605,94
28		
29	Umsatzsteigerung zum Optimum	
30		
31	neuer Fahrpreis (Ausgabe III)	
32		

Abbildung 5: Ausgabefenster der linearen Optimierung

Bei den Standardeinstellungen sieht man nun auch sehr schön, in wie weit sich die momentane Situation verbessern lässt. Werden statt 16 Kontrolleure 25 eingestellt, sowie deren Verteilung stärker auf die Stammstrecke konzentriert (über 50%), so steigen zwar die Ausgaben der Personalkosten auf der einen Seite, auf der anderen Seite fällt aber auch die durchschnittliche Schwarzfahrerquote:

$$\begin{aligned} &\text{Input} \quad \text{Optimum} \\ \alpha_S &= 8,01\% \rightarrow 6,14\% \\ \alpha_1 &= 6,45\% \rightarrow 6,53\% \\ \alpha_2 &= 5,73\% \rightarrow 4,43\% \\ \alpha_3 &= 5,38\% \rightarrow 3,18\% \end{aligned}$$

Als abschließendes Resultat erhält man nun eine Gewinnsteigerung von ca.

$$\frac{1010605 - 1008399}{1008399} = 0,2\%.$$

Die zusätzlichen Personalkosten werden also vollständig durch den zusätzlichen Abschreckungsfaktor (weniger Schwarzfahrer $\Rightarrow$ mehr zahlende Fahrgäste) gegenfinanziert.

3 Das Nash-Gleichgewicht

Natürlich dürfte auch jedem klar sein, dass die aktuellen Schwarzfahrerquoten nicht mit den sich spieltheoretisch ergebenden Nash-Gleichgewichten übereinstimmen werden. Das liegt unter anderem daran, dass der mögliche Schwarzfahrer nicht genau vorher sagen kann, zu welcher Wahrscheinlichkeit er wo kontrolliert wird. Wir befinden uns in der Realität in einem Spiel ohne vollkommener Information. Zusätzlich kann in der Realität auch nicht angenommen werden, dass jeder Fahrgast ökonomisch rational handelt. So beinhaltet das erwischt werden nicht nur die Zahlung des Bußgeldes, sondern es ist für viele Leute auch eine Frage der Ethik (Betrug; lasse ich die Kooperatoren für mein Verhalten durch höhere Fahrpreise bezahlen?) und unter Umständen gewiss auch eine Frage des Schamgefühls (Blicke außenstehender beim ertappt werden).

Anhand der linearen Optimierung konnten wir bereits eine bessere Möglichkeit aufzeigen, um die reale Situation (= die Eingabe des Inputs) zu verbessern. Im weiteren Verlauf wollen wir nun spezieller auf spieltheoretische Verbesserungsvorschläge eingehen, bei denen wir aus mathematischer Sicht mit den Nash-Werten rechen. Doch zuerst müssen wir die jeweiligen Gleichgewichte zwischen Bestrafung und Schwarzfahren finden.

Als Beispielsrechnung verwenden wir die Zeitphase t=1 und Zone 2:

	kontrollieren	nicht kontrollieren
zahlen	$(-4,40, -C_2 + 4,40)$	$(-4,40, +4,40)$
schwarz fahren	$(-40, -C_2 + (20 - 4,40))$	$(0, -4,40)$

Der Fahrgast kann sich entscheiden, ob er entweder den Fahrpreis bezahlt ("zahlen"), dann hat er eine sichere Ausgabe von -4,40 (dem Preis für eine Streifenkarte von Zone 2 auf S), oder er kann sich dazu entschließen schwarz zu fahren. Dann hat er bei einer anstehenden Kontrolle eine Ausgabe von -40 als Strafe zu bezahlen, sollte er nicht kontrolliert werden, entstehen ihm auch keine Ausgaben. Die S-Bahn München kann sich simultan entscheiden, ob sie entweder kontrollieren will (so entstehen ihr Kontrollkosten von C_2[7]), oder ob sie nicht kontrollieren will. Je nachdem, ob der Fahrgast bezahlt oder nicht und ob sich das Unternehmen für oder gegen das Bestrafungssystem ausgesprochen hat, erhält es dann Einnahmen in Höhe des Fahrpreises von den Kooperatoren, hat Kontrollkosten zu decken von den Bestrafern, und nimmt Bußgeld ein (Beachte: auch wenn vom Schwarzfahrer 40 Euro Bußgeld verlangt werden, so hat das Unternehmen effektiv nur 20 Euro Verdienst daran auf Grund von weiteren Verwaltungskosten). Da die Kontrollkosten (hier: $C_2 = 2,54$) bei einer erfolgreichen Kontrolle kleiner als die Bußgeldeinnahmen (hier: $20 - 4,40 = 15,60$) sind, gibt es wie zu erwarten kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Stattdessen werden wir nun das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien bestimmen:

$$
\begin{aligned}
E[\text{zahlen}] &= \gamma_{12}(-4,40) + (1 - \gamma 12)(-4,40) && = \\
&= \gamma_{12}(-40) + (1 - \gamma_{12})0 && = E[\text{nicht zahlen}]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \gamma_{12} = \frac{4,40}{40} = 11\%(= \frac{\text{Fahrpreis}}{\text{Höhe Bußgeld}})
$$

Aus der berechneten Prüfquote γ lassen sich nun die Anzahl an Kontrolleuren sowie die Personalkosten berechnen:

[7] siehe Anhang, Formel (6)

$$\gamma_{12} = \frac{\text{Anzahl an Kontrollen}}{\text{Gesamtzahl der Fahrgäste in der Zone}}$$

$$\Rightarrow \text{Personakosten } p_{12} = \frac{5 * 20 * \gamma_{12} * (g_3 + g_2)}{5 * 60 * 1,4}$$

$$\Rightarrow \text{Kontrollkosten } C_2 = \frac{p_{12}}{\frac{1}{2}\frac{p_{12}}{100} * 5 * 60 * 1,4} * \frac{1}{v_2} (= \frac{\text{Personalkosten}}{\text{Anzahl an Kontrollen}})$$

Für die Schwarzfahrerquote α im Nash-Gleichgewicht wird nun wieder der selbe Ansatz verwendet:

$$\begin{aligned} E[\text{kontrollieren}] &= (1-\alpha_2)(-C_2 + 4,40) + \alpha_2(-C_2 + 15,60) \quad &&= \\ &= (1-\alpha_2) * 4,40 + \alpha_2(-4,40) &&= E[\text{nicht kontrollieren}] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{-C_2}{20} = 13\% (= \frac{\text{Kontrollkosten}}{\text{0,5*Höhe Bußgeld}})$$

Benutzt man erneut Excel, löst den Makro über den Button "Ausgabe II" aus, und vergleicht die erscheinenden Nash-Gleichgewichte mit den Ausgabewerten des Inputs, so ergibt sich ein niedrigerer Umsatz.

	J	K
6		***AUSGABE II***
7		*Nash-Gleichgewicht*
8		*zwischen Sbahn u. Fahrgäste*
9		*(optimum)*
10	# Kontrolleur-Teams	42,5693
11		
12	Verteilung der Kontrolleure	67,77%
13		13,72%
14		12,84%
15		5,66%
16		
17	Prüfquote	5,50%
18		5,50%
19		11,00%
20		16,50%
21		
22	Schwarzfahrerquote	3,51%
23		17,35%
24		18,54%
25		42,03%
26		
27	Gesamtumsatz	993.181,06
28		
29	Umsatzsteigerung zum Optimum	**-1,72%**
30		
31	neuer Fahrpreis (Ausgabe III)	
32		

Abbildung 6: Ausgabefenster bzgl. Nash-Gleichgewicht

Die Hintergründe lassen sich durch einen kurzen Datenvergleich erklären:

	Optimum	Nash
Anzahl Kontrolleur-Teams	25	43
Schwarzfahrerquote S	$6,14\%$	$3,51\%$
1	$6,53\%$	$17,35\%$
2	$4,43\%$	$18,54\%$
3	$3,18\%$	$42,03\%$

Nach dem Nash-Gleichgewicht liegt die Schwarzfahrerquote deutlich über dem des Optimums, obwohl fast doppelt so viele Kontrolleure im Einsatz sind! Im Hinblick auf die Realität lässt sich dies einfach dadurch erklären, dass viele Leute nicht nach dem spieltheoretisch für sie optimalen Fall handeln! Denn selbst wenn alle zu diesem Ergebnis führenden Daten offen einsehbar wären, so steht immer noch die menschliche Sichtweise der Moral dem entgegen. Viele Leute bezahlen den Fahrpreis, nicht aus Angst vor einer Strafe, sondern weil es moralisch gesehen das richtige ist. Dies begründet die stark erhöhte Schwarzfahrerquote im Nash-Gleichgewicht im Vergleich zur Realität, und als Resultat dazu auch die Folge, dass eine erhöhte Anzahl an Kontrolleuren eingesetzt werden muss. Ebenso lässt sich daraus nun ablesen, wieso der Gewinn für die S-Bahn München im Nash-Gleichgewicht niedriger ausfallen würde: Sie profitiert nicht mehr wie in der Realität von der Moral der Leute!
So können sie mit weniger Kontrollen die Schwarzfahrerquote niedrig halten, während sie zeitgleich Personalkosten einsparen.

Die Lösung nach dem Nash-Gleichgewicht ergibt also in den für beide Seiten optimalen Fall, unter der Bedingung, dass jeder ökonomisch rational und unter dem Besitz vollständiger Informationen handelt.

4 Vollständige Kooperation

Wie nun schon öfters erwähnt untersuchen wir hier ein altruistisches Bestrafungssystem. Der Nachteil darin wird schon durch den Ausdruck "altruistisch" klar: Die Kooperatoren haben durch die Existenz eines solchen Bestrafungssystems erhöhte Ausgaben.
Es stellt sich daher die spieltheoretische Frage, welchen Nutzen eine vollständige Kooperation aufweisen würde. Vollständig in diesem Sinne bedeutet, dass es in unserem Modell nur noch Kooperatoren und keine Defektoren gibt.
Die Konsequenz: Das Bestrafungssystem wird unnötig!

Wenn die Gesellschaft nun keinerlei Aufwendungen mehr für das Bestrafungssystem zu tragen hat, so kann (bei gleichbleibendem Gewinn im Vergleich zum System mit Defektoren und Bestrafern) der Fahrpreis gesenkt werden, da die Personalkosten für die Kontrolleure eingespart werden. Die erwartete Zahlung der Gemeinschaft wird also geringer.

Sei u der ursprüngliche Umsatz [8] bzgl dem alten System mit Bestrafung, und u' der Gewinn, der bei einer vollständigen Kooperation erwirtschaftet wird (beides wieder für den Fall t=1, Zone 2):

$$u' = 0,75 * g_{12} * m_2 + (1 - 0,75) * g_{12} * f_2$$

$\Rightarrow$ der neue Fahrpreis kann dann um den Faktor $\frac{u}{u'}$ gesenkt werden:

$f'_s = f_s * \frac{u}{u'}$

$\vdots$

$m'_3 = m_3 * \frac{u}{u'}$

Über die inzwischen bekannten Makro-Buttons in der Excel-Tabelle lassen sich nun ohne größere Probleme im Ausgabefenster die Daten anzeigen, wie sie bei einer solchen vollständigen Kooperation zustande kommen würden!

	L	M
6		***Ausgabe III***
7		*Vollständige Kooperation*
8		
9		
10	# Kontrolleur-Teams	0
11		
12	Verteilung der Kontrolleure	0,00%
13		0,00%
14		0,00%
15		0,00%
16		
17	Prüfquote	0,00%
18		0,00%
19		0,00%
20		0,00%
21		
22	Schwarzfahrerquote	0,00%
23		0,00%
24		0,00%
25		0,00%
26		
27	Gesamtumsatz	1.044.656,25
28		
29	Umsatzsteigerung zum Optimum	3,37%
30		wird verwendet für Fahrpreissenkung
31	neuer Fahrpreis (Ausgabe III)	-2,13
32	m_S	-0,73
33	f_1	-2,13
34	m_1	-1,21
35	f_2	-4,27
36	m_2	-1,94
37	f_3	-6,40
38	m_3	-3,03
39		

Abbildung 7: Ausgabefenster bei der vollständigen Kooperation

[8] siehe Anhang, Formel (8)

Man kann sofort sehen, dass der Umsatz um 3,37% gesteigert wurde, und kann der Abbildung 7 nun entnehmen, welche Höhe die neuen Fahrpreise hätten. Über den Hyperlink zu den genaueren Ergebnissen erhält man zusätzlich eine Auflistung, was ein Fahrgast für eine erwartete Zahlung besitzt, sollte er zu einer bestimmten Uhrzeit und von einer gegebenen Zone aus auf die Stammstrecke fahren. Dort sieht man ebenso, dass die erwartete Zahlung bei einer vollständigen Kooperation niedriger ist, als bei der erwarteten Zahlung nach dem Optimum, bei dem das Schwarzfahren (und die daraus resultierende mögliche Strafe) möglich ist.

Auch wenn dadurch nun gezeigt wurde, dass eine vollständige Kooperation der Allgemeinheit das beste Ergebnis liefern würde (erwartete Zahlung aller wird gesenkt), so ist es vollkommen unmöglich dieses mathematische Ergebnis in der Praxis anzuwenden! Der Grund dahinter liegt wie beim Nash-Gleichgewicht wieder am Spieler selbst. Dieses mal nicht auf Grund der Moral, sondern auf Grund keiner Moral:
Nicht in jedem von uns steckt ein vollkommen sozialer Mensch, der nur nach dem Gemeinwohl handelt. Ganz im Gegenteil, denn so ist (fast) jeder ein Homo Oeconomicus, der nicht seine eigenen Interessen komplett ausblendet! Wenn jeder weiß, dass es keine Fahrkartenkontrollen mehr gibt, so kann sich auch jeder sicher sein nicht erwischt zu werden. Er hat also weder materielle Folgen (Strafe) zu befürchten, noch strafende Blicke außenstehender Personen. Das einzige was einen davon abhält dieses System auszunutzen, liegt dann nur noch bei den individuellen moralischen Prinzipien. Und wer möchte schon von der Menschheit behaupten, dass ein Jeder sich daran halten würde.

Daher entsteht eine Art Teufelskreis, denn je mehr Leute sich dazu entschließen doch schwarz zu fahren, desto kleiner wird der zusätzliche Gewinn der S-Bahn München, desto kleiner wird der Faktor $\frac{u}{u'}$, worauf hin der Fahrpreis steigt und wodurch wieder mehr Leute schwarz fahren werden!

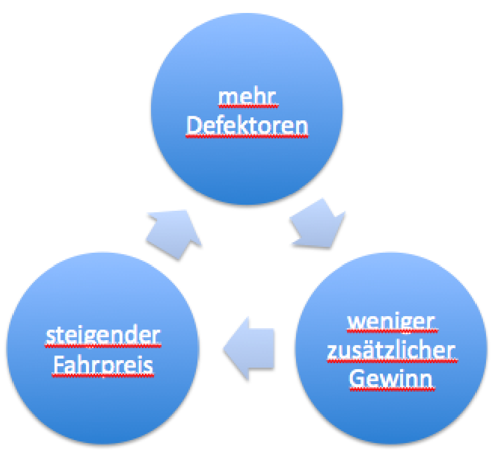

Abbildung 8: selbstverstärkender Kreislauf

5 Verbessertes Bestrafungssystem

Wir haben also gesehen, dass eine vollständige Kooperation von Vorteil wäre, diese jedoch nicht in die Realität übertragbar ist! Ein Bestrafungssystem ist also von Nöten. Aber ist das aktuelle System spieltheoretisch (und damit auch wirtschaftlich) sinnvoll?

Bisher bezahlt man im Fall erwischt zu werden 40,- Euro Bußgeld und nach dreimaligen Vorfall droht einem eine Anzeige. Diese Anzeige kann aber nur erfolgen, wenn bei den vorherigen Fällen auch jedesmal die Personalien des Schwarzfahrers gespeichert wurden, was in der Praxis häufig nicht realisiert wird. So gibt es beispielsweise Schwarzfahrer, die grundsätzlich keine Fahrscheine lösen, dafür immer in Bar das Bußgeld bereit halten -bei sofortiger Zahlung kommt es zu keiner Namensspeicherung. Übertragen wir diese Fakten auf das Modell, so wird sofort das Problem sichtbar:
Der Spieler "Fahrgast" steht jedes Mal vor der selben Entscheidung, da wir auch bei der Iteration dieses Modells immer wieder den selben Input besitzen! Das Bestrafungssystem schreckt folglich etwas ab, aber es beinhaltet keinesfalls in irgend einer Weise eine Progression, mit dessen Hilfe man vielleicht doch etwas näher an das Optimum der vollständigen Kooperation gelangen würde. Wir zeigen nun eine Lösung zu diesem Problem auf, indem wir ein neues, verbessertes Bestrafungssystem entwickeln werden.

Zuerst soll in unserem neuen Bestrafungsmodell grundsätzlich die Speicherung der Daten von Schwarzfahrern erfolgen. Dies ermöglicht uns das Schwarzfahrermodell ohne Probleme iterieren zu lassen! Zusätzlich wollen wir weg gehen von den konstanten 40,- Euro Strafe und der Anzeige nach dem dritten Mal (deren Sinn im Rechtsstaat begründet liegt, aber den Kooperatoren spieltheoretisch erstmal wenig nützt). Stattdessen wollen wir ein gestaffeltes Bußgeldsystem einführen;
Dabei beträgt die Höhe des Bußgelds 40(q+1)Euro, mit q= Anzahl wie oft man zuvor beim Schwarzfahren erwischt wurde.
Nun steht unser potentieller Schwarzfahrer also wirklich immer wieder vor einer neuen Entscheidung mit verschiedenen Nash-Gleichgewichten. Er fährt anfangs genauso wie im alten System schwarz, aber sobald er einmal erwischt wurde, verändern sich die Modellvoraussetzungen durch das gestiegene Bußgeld.

Wie sich die Nash-Gleichgewichte zwischen der Schwarzfahrerquote und der Prüfquote im Einzelnen verändern, wird wieder genauer in der Excel durch einen Klick auf den Button "Ausgabe IV"verdeutlicht.

	N	O	
6		***Ausgabe IV***	
7		*Ergebnis bei verbessertem*	
8		*Bestrafungssystem für q=*	**2**
9		(neue Nash-Werte)	
10	# Kontrolleur-Teams	14,1898	
11			
12	Verteilung der Kontrolleure	67,77%	
13		13,72%	
14		12,84%	
15		5,66%	
16			
17	Prüfquote	1,83%	
18		1,83%	
19		3,67%	
20		5,50%	
21			
22	Schwarzfahrerquote	1,17%	
23		5,78%	
24		6,18%	
25		14,01%	
26			
27	Gesamtumsatz	1.027.850,45	
28			
29	Umsatzsteigerung zum Optimum	1,71%	
30			
31	neuer Fahrpreis (Ausgabe III)		
32			

Abbildung 9: Ausgabefenster beim verbessertem System

Wurde man beispielsweise bereits 2 mal erwischt, so steht bei erneutem Vorfall ein Bußgeld in Höhe von 120 Euro an. In Folge dessen geht automatisch die Schwarzfahrerquote nach dem Nash-Gleichgewicht zurück und dieser Effekt lässt sich nun doppelt ausnutzen: Bei einer verringerten Schwarzfahrerquote müssen weniger Kontrollen vollzogen werden, und neben einer Erhöhung der Einnahmen findet zeitgleich eine Einsparung an Personalkosten statt.
(Nash $\rightarrow$verbessertes System)

$$\begin{aligned}
\alpha_S &= 3,51\% \rightarrow 1,17\% && \text{(vgl. Optimum: } 6,14\%) \\
\alpha_1 &= 17,35\% \rightarrow 5,87\% && \text{(vgl. Optimum: } 6,53\%) \\
\alpha_2 &= 18,54\% \rightarrow 6,18\% && \text{(vgl. Optimum: } 4,43\%) \\
\alpha_3 &= 42,03\% \rightarrow 14,01\% && \text{(vgl. Optimum: 3,18\%)}
\end{aligned}$$

$$x = 43 \rightarrow 14 \qquad \text{(vgl. Optimum: 25)}$$

Anhand des Vergleichs mit den vorherigen optimalen Werten, auf Basis der linearen Optimierung, sieht man, dass die Schwarzfahrerquote gerade auf den viel befahrenen Zonen "Stamm" und "1"deutlich zurück gegangen sind, obwohl man weniger Kontrolleure im Einsatz hat!
Die zeitgleiche Ersparnis an Personalkosten und erhöhte Einnahmen am Ticketverkauf führen nun zu einem erhöhten Umsatz, dessen Steigerung im Vergleich zum Umsatz der linearen Optimierung nochmals um 1,71% zu nimmt!
Beachtet man nun noch, dass die Schwarzfahrerquote und Kontrolleursanzahl auf der Berechnung der Nash-Gleichgewichte entstanden sind, und lässt in weiteren Überlegungen erneut den psychologischen Faktor der Moral mit einfließen, so würde sich noch eine weitaus stärkere Umsatzsteigerung ergeben!

Es sollte also außer Frage stehen, dass dieses neue Bestrafungskonzept das bisherige aus spieltheoretischer Sicht in den Schatten stellt! Zudem hat das vorhandene Stufenverfahren noch einen weiteren Vorteil gegenüber der dem Leser eventuell einfallenden Idee, man könne das Bußgeld doch bereits beim ersten Mal auf eine unvorstellbar hohe Summe festsetzen:
Manche Leute fahren unbeabsichtigt schwarz, sei es weil sie nicht wissen, dass sie für ihr Fahrrad ein Ticket lösen müssen, oder ob sie wirklich nur ihre Fahrkarte in der Tasche nicht finden. Natürlich lassen sich solche Aussagen nicht nachweisen, aber für den Fall dass es der Wahrheit entspricht, lässt es sich mit einer unverdienten Bestrafung von 40 Euro moralisch leichter leben, als mit einer Bestrafung in drakonischer Höhe. Dass man das Ticket jedoch bei einer zweiten oder gar dritten Kontrolle nur verloren hat, wird dann immer unwahrscheinlicher, und die Strafe erhöht sich. Somit ist das Staffelsystem auch unter moralischen Gesichtspunkten (Bestrafung eines Unschuldigen) in Ordnung!

Teil III
Schwarzfahren -ja oder nein?

Als kleinen Ausblick haben wir noch versucht die Frage zu beantworten, welche sich für uns, meist nicht übermäßig solventen Studenten, am ehesten stellt: Lohnt sich Schwarzfahren überhaupt?

Dazu haben wir in der Excel im Ausblick (erreichbar über einen Hyperlink rechts des letzten Makro-Buttons) jeweils den Erwartungswert vom Schwarzfahren, die dazugehörige Preisdifferenz zum Ticket kaufen sowie die benötigte Bußgeldhöhe, die die Bahn erheben müsste, damit der Fahrgast indifferent wäre (dann würde man sich ein Ticket kaufen). Zudem wird angegeben, ob sich das Schwarzfahren bei einer einmaligen Fahrt lohnt, und ab welcher Anzahl an Fahrten man sich besser ein Monatsticket kauft.
Der Erwartungswert des Schwarzfahrens E(Kosten) ergibt sich einfach aus der Prüfquote und der Höhe des Bußgelds (P[erwischt werden]*Höhe Bußgeld).
"Kontrolliert werden" als Zufallsvariable ist unabhängig und hat keine Auswirkung auf die Prüfwahrscheinlichkeit, ob man bereits in einer früheren Fahrt kontrolliert wurde.
Ist die Differenz zum "Ticket kaufen"positiv, so ist das schwarzfahren generell dem kaufen einer Streifenkarte vorzuziehen. Die Fahranzahl y, ab der sich dann eine Monatskarte rentiert, berechnet sich folgendermaßen:

$$y * \text{E(Kosten)} = \text{Preis Monatskarte (Ausbildungstarif II; in Abhängigkeit zur Anzahl an gefahrenen Zonen)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\text{Preis Monatskarte}}{\text{E(Kosten)}}$$

Ist hingegen die Differenz zum "Ticket kaufen"negativ, so ist das schwarzfahren generell schlechter als das kaufen einer Streifenkarte! Es sollte sich also grundsätzlich ein Ticket gekauft werden, und die Anzahl an Fahrten, ab der sich eine Monatskarte rentiert, ergibt sich nun durch:

$$y * \text{Preis für Streifenkarte} = \text{Preis Monatskarte (Ausbildungstarif II; in Abhängigkeit zur Anzahl an gefahrenen Zonen)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\text{Preis Monatskarte}}{\text{Preis für Streifenkarte}}$$

(Die Preise für die Monatskarte richten sich nach den aktuellen Preisen der S-Bahn München GmbH:
2 Ringe (Stamm) $\hat{=}$ 31,50; 1 Zone $\hat{=}$ 44,90; 2 Zonen $\hat{=}$ 73,00; 3 Zonen $\hat{=}$ 100,40)

	BK	BL	BM	BN	BO	BP
8		**Input**				
9						
10		**E(Kosten)**	**Differenz zur Streifenkarte**	**Indiff. Strafe**	**Streifenkarte**	**Monatskarte ab**
11	**Zone3**	-1,39	36,97%	-63,47	schwarz fahren	32
12	**Zone3-Zone2**	-2,18	1,10%	-40,44	schwarz fahren	34
13	**Zone3-Zone1**	-3,08	29,99%	-57,13	schwarz fahren	33
14	**Zone3-Stamm**	-3,62	45,22%	-73,03	schwarz fahren	28
15						
16	**Zone2**	-0,82	62,84%	-107,63	schwarz fahren	55
17	**Zone2-Zone1**	-1,75	20,24%	-50,15	schwarz fahren	42
18	**Zone2-Stamm**	-2,31	47,53%	-76,24	schwarz fahren	32
19						
20	**Zone1**	-0,96	56,52%	-91,99	schwarz fahren	47
21	**Zone1-Stamm**	-1,52	30,81%	-57,81	schwarz fahren	29
22						
23	**Stamm**	-0,58	73,67%	-151,90	schwarz fahren	54
24						
25		**Mittelwert:**	**40,49%**			

Abbildung 10: ...bezüglich des Inputs

	BR	BS	BT	BU	BV
8	**Realität**				
9					
10	**E(Kosten)**	**Differenz zur Streifenkarte**	**Indiff. Strafe**	**Streifenkarte**	**Monatskarte ab**
11	-3,25	-47,84%	-27,06	Ticket kaufen	20
12	-5,06	-129,79%	-17,41	Ticket kaufen	17
13	-5,87	-33,43%	-29,98	Ticket kaufen	15
14	-6,78	-2,69%	-38,95	Ticket kaufen	15
15					
16	-1,96	10,79%	-44,84	schwarz fahren	23
17	-2,85	-29,56%	-30,87	Ticket kaufen	33
18	-3,84	12,79%	-45,87	schwarz fahren	19
19					
20	-0,93	57,57%	-94,27	schwarz fahren	48
21	-1,97	10,40%	-44,64	schwarz fahren	23
22					
23	-1,06	51,70%	-82,82	schwarz fahren	30
24					
25	**Mittelwert:**	-10,01%			

Abbildung 11: bezüglich der linearen Optimierung

	BX	BY	BZ	CA	CB
8	**Neues System**				
9					
10	**E(Kosten)**	**Differenz zur Streifenkarte**	**Indiff. Strafe**	**Streifenkarte**	**Monatskarte ab**
11	-6,60	-200,00%	-40,00	Ticket kaufen	20
12	-10,76	-389,00%	-24,54	Ticket kaufen	17
13	-12,76	-190,02%	-41,38	Ticket kaufen	15
14	-14,73	-123,13%	-53,78	Ticket kaufen	15
15					
16	-4,40	-100,00%	-60,00	Ticket kaufen	20
17	-6,52	-196,33%	-40,49	Ticket kaufen	33
18	-8,60	-95,45%	-61,40	Ticket kaufen	33
19					
20	-2,20	0,00%	-120,00	Ticket kaufen	20
21	-4,36	-98,17%	-60,56	Ticket kaufen	20
22					
23	-2,20	0,00%	-120,00	Ticket kaufen	14
24					
25	**Mittelwert:**	-139,21%			

Abbildung 12: ...bezüglich des verbesserten Systems mit q=2

Betrachtet man die unterschiedlichen Abbildungen, so erkennt man auch hier wieder das bereits festgestellte Muster, dass von Modell zu Modell sich das Schwarzfahren immer weniger rentiert, bis es sich schließlich im neuesten Modell (mit dem neuen Bestrafungskonzept) überhaupt nicht mehr rentiert, schwarz zu fahren.
Dies bestätigt nochmals die Ergebnisse aus den vorherigen spieltheoretischen Analysen.

Abschließende Bemerkung:
Natürlich übernehmen wir keine Haftung über mögliche Folgeschäden, sollte sich jemand angesprochen fühlen, und sein Schwarzfahrerverhalten unserem Modell entsprechend zu optimieren versuchen....

Teil IV
Anhang: Formelsammlung

(1) Anzahl Fahrgäste zu Zeit i in Zone j: $(g_{ij}) \in \mathbb{R}^{3x4}$

[g $\hat{=}$ Usereingabe; Verteilungsmatrix ergibt sich aus Hochrechnungen anhand realer Daten (kummuliert 88%, restliche 12% außerhalb des betrachteten Zeitraums)]

$$(g_{ij})_{ij} = g * \begin{pmatrix} 0,182 & 0,073 & 0,045 & 0,019 \\ 0,147 & 0,059 & 0,037 & 0,016 \\ 0,171 & 0,070 & 0,044 & 0,017 \end{pmatrix}$$

(2) Personalkosten zu Zeit i in Zone j: (p_{ij})

[v $\in \mathbb{R}^4$ Prüfverteilung $\hat{=}$ Usereingabe; Personalkosten 1 Kontrolleur pro Std: 20 Euro]

$$p_{1j} = v^T * \underbrace{5 * 20 * \text{Anzahl Kontrollteams} * 2}_{= Personalkosten\, gesamt\, in\, Zeit\, 1\, p_1}$$
$$p_{2j} = v^T * \underbrace{6 * 20 * \text{Anzahl Kontrollteams} * 2}_{= Personalkosten\, gesamt\, in\, Zeit\, 2\, p_2}$$
$$p_{3j} = v^T * \underbrace{5 * 20 * \text{Anzahl Kontrollteams} * 2}_{= Personalkosten\, gesamt\, in\, Zeit\, 3\, p_3}$$

(3) Anzahl Kontrollen zu Zeit i in Zone j: (k_{ij})

[v $\in \mathbb{R}^4$ Prüfverteilung $\hat{=}$ Usereingabe; 1,4 Kontrollen pro Minute und Team]

$$k_{1j} = v^T * \underbrace{5 * 60 * 1,4 * \text{Anzahl Kontrollteams}}_{= Anzahl\, Kontrollen\, gesamt\, in\, Zeit\, 1\, k_1}$$
$$k_{2j} = v^T * \underbrace{6 * 60 * 1,4 * \text{Anzahl Kontrollteams}}_{= Anzahl\, Kontrollen\, gesamt\, in\, Zeit\, 2\, k_2}$$
$$k_{3j} = v^T * \underbrace{5 * 60 * 1,4 * \text{Anzahl Kontrollteams}}_{= Anzahl\, Kontrollen\, gesamt\, in\, Zeit\, 3\, k_3}$$

(4) Prüfquote zu Zeit i in Zone j: (γ_{ij})

[v $\in \mathbb{R}^4$ Prüfverteilung $\hat{=}$ Usereingabe; 1,4 Kontrollen pro Minute und Team]

$$\gamma_{ij} = \frac{k_{ij}}{\underbrace{\sum_{l \geq j} g_{il}}_{= Anzahl\,Fahrgaeste\,gesamt\,bis\,Zone\,j}}$$

(4.1) durchschnittliche Prüfquote in Zone j: $\bar{\gamma}_j$

$$\bar{\gamma}_j = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{ij}$$

(5) Fahrgastaufteilung zu Zeit i in Zone j:

[75% Monatskartenbesitzer; Schwarzfahrerquote α nach Usereingabe und Antizipationskonstante]

$$g_{ij} = \underbrace{0,75 * g_{ij}}_{= Anteil\,Monatskartenbesitzer} +$$
$$+ \underbrace{0,25 * (1 - \alpha_j) * g_{ij}}_{= Anteil Streifenkartenbesitzer} +$$
$$+ \underbrace{0,25 * \alpha_j * g_{ij}}_{= Anteil Schwarzfahrer}$$

(6) Kosten pro Kontrolle zu Zeit i in Zone j: C_{ij}

[$v_j^* \hat{=}$Verteilung im Nash-Gleichgewicht in Zone j]

$$C_{ij} = \frac{p_{ij}}{\frac{p_{ij}}{100} * 5 * 60 * 1,4} * 2 * \frac{1}{v_j^*}$$

(7) erwischte Schwarzfahrer zu Zeit i in Zone j: (ζ_{ij})

[ω gibt an, zu welcher Wahrscheinlichkeit ein Schwarzfahrer wo aussteigt: $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0,60 & 0,50 & 0,50 \\ 0,00 & 0,40 & 0,35 & 0,35 \\ 0,00 & 0,00 & 0,15 & 0,10 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix}$; ω_{ij} ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schwarzfahrer, der in Zone j (j=1≙Stamm, j=2≙Zone 1, j=3≙Zone 1, j=4≙Zone 3) einsteigt noch (i-1) Zonen weiter fährt]

$$\zeta_{i3} = \gamma_{i3} * \underbrace{0,25 * \alpha_3 * g_{i3}}_{=Anzahl\,Schwarzfahrer\,in\,Zone\,3}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\zeta_{iS} = \gamma_{i1} * (& \underbrace{0,25 * \alpha_1 * g_{iS}}_{=Anzahl\,Schwarzfahrer\,in\,Zone\,S} + \\ & + \underbrace{(0,25 * \alpha_1 * g_{i1} * (1-\gamma_{i1}) * (1-\omega_{12}}_{=Anzahl\,Schwarzfahrer\,aus\,Zone\,1} + \\ & + \underbrace{(0,25 * \alpha_2 * g_{i2} * (1-\gamma_{i2}) * (1-\omega_{13}-\omega_{23}) * (1-\gamma_{i1})}_{=Anzahl\,Schwarzfahrer\,aus\,Zone\,2} + \\ & + \underbrace{(0,25 * \alpha_3 * g_{i3} * (1-\gamma_{i2}) * (1-\omega_{14}-\omega_{24}-\omega_{34}) * (1-\gamma_{i2}) * (1-\gamma_{11})}_{=Anzahl\,Schwarzfahrer\,aus\,Zone\,3})\end{aligned}$$

(8) Umsatz: (u_{ij})

[Bußgeldhöhe beträgt effektiv ca. 20 Euro; f_j, m_j entsprechen den Fahrpreisen von Zone j nach S (Streifenkarte=f=(2,20; 2,20; 4,40; 6,60), Monatskarte= m=$\frac{1}{40}$(30; 50; 80; 120)]

$$\begin{aligned}u_{ij} = & \underbrace{0,75 * g_{ij} * m_j + 0,25 * (1-\alpha_j) * g_{ij} * f_j}_{=Einnahmen\,aus\,Fahrkartenverkauf} \\ & + \underbrace{\zeta_{ij} * 20}_{=Bugeldeinnahmen} \\ & - \underbrace{p_{ij}}_{=Ausgaben\,fuer\,Personalkosten}\end{aligned}$$