

# Quantenspiele

Matthias Lechner, Benedikt Fuchs

23. Februar 2009



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Quantenzustände</b>	<b>3</b>
2.1	Quantenmechanische Grundlagen . . . . .	3
2.2	Beispiel: Quantenmünze . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Ein Münzspiel</b>	<b>6</b>
3.1	Die klassische Variante . . . . .	6
3.2	Die Quanten-Variante . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Das Gefangenendilemma</b>	<b>10</b>
4.1	Verschränkung . . . . .	10
4.2	Das Quanten-Gefangenendilemma . . . . .	11
4.3	Neue Strategien . . . . .	13
4.3.1	Unverschränkte Zustände . . . . .	13
4.3.2	Verschränkte Zustände . . . . .	14
4.4	Neues Nash-Gleichgewicht . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Das Angsthasenspiel (Game of Chicken)</b>	<b>18</b>
5.1	Das klassische Spiel . . . . .	18
5.2	Übertragung in die Quantenmechanik . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Warum Quantenspiele?</b>	<b>20</b>

---

## 1 Einleitung

Die 1999 von DAVID MEYER [M] ins Leben gerufene Quantenspieltheorie betrachtet Spiele (im Sinne der Spieltheorie), welche mit den aus der Quantenmechanik bekannten Quantenzuständen gespielt werden. Dieser Artikel gibt eine Einführung in diese Verbindung der Spieltheorie mit der Quanteninformationstheorie.

Er ist dabei an Leser mit Grundkenntnissen in Mathematik und Spieltheorie gerichtet. Die für das Verständnis erforderlichen Grundlagen der Quantenmechanik werden zu Beginn erläutert, und anschließend an dem für die weiteren Betrachtungen wichtigen Beispiel der Quantenmünze vertieft. Danach werden drei Quantenspiele vorgestellt. In dem ersten wird mit Quantenmünzen ein einfaches Münzspiel nach [M] analysiert. Diese Münzen finden auch in dem zweiten Beispiel Verwendung, dem Quanten-Gefangenendilemma nach [EWL]. Als letztes Beispiel betrachten wir die Quantenversion des „Game of Chicken“. Zum Abschluss wird ein Ausblick für Anwendungsmöglichkeiten der Quantenspieltheorie und Hinweise auf weiterführende Artikel gegeben.

## 2 Quantenzustände

### 2.1 Quantenmechanische Grundlagen

Die Quantenmechanik ist eine fundamentale Theorie, welche heute die Grundlage der meisten Teilgebiete der Physik darstellt. Sie entstand in den 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts und lieferte erstmals eine plausible Erklärung für Phänomene im atomaren und subatomaren Bereich. Dies ermöglichte es, den Aufbau der Atome zu verstehen und führte (und führt) zu Entwicklungen, die unser heutiges Leben nachhaltig beeinflussen, wie z. B. die Halbleitertechnik (Computer) oder der Laser.

Der grundlegende Unterschied im Vergleich zu klassischen Mechanik liegt in der Frage, wie der *Zustand* eines Objektes genau beschrieben werden soll. In der klassischen Mechanik nach NEWTON ist der Zustand eines Objektes durch seine Orts- und Impulskoordinaten<sup>1</sup> festgelegt. Die Quantenmechanik dagegen verfolgt einen grundsätzlich anderen Ansatz: Ein Objekt wird beschrieben durch einen (auf 1 normierten) *Zustandsvektor*  $\psi$  in einem komplexen Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Aus diesem Zustandsvektor lassen sich die gesuchten Eigenschaften des Quantenobjektes nicht einfach ablesen, sondern müssen erst ermittelt, *gemessen*, werden. Je nachdem, was gemessen werden soll (z. B. Ort, Impuls, etc.), wenden wir einen für diese Messung charakteristischen hermiteschen Messoperator auf den Zustandsvektor an. Die möglichen Messergebnisse sind dann die (immer reellen) Eigenwerte dieses Messoperators. Misst man also in der Quantenmechanik zum Beispiel den Drehimpuls eines Teilchens, so beantwortet die Messung nicht einfach die Frage „Wie groß ist der Drehimpuls?“, sondern vielmehr die Frage „Ist der Drehimpuls  $0, \hbar, 2\hbar \dots$ “, da die Eigenwerte des Drehimpuls-Operators ganzzahlige Vielfache der Naturkonstanten  $\hbar$  sind. Der Umstand, dass viele Messgrößen der Natur nicht kontinuierlich, sondern Vielfache einer kleinsten Einheit („gequantelt“) sind, gab der Quantentheorie ihren Namen.

Da ein Messoperator hermitesch ist, bilden seine Eigenvektoren (*Eigenzustände*) ein Orthogonalsystem, das als Basis von  $\mathcal{H}$  verwendet wird, um den Operator zu diagonalisieren (z. B. „*Ortsdarstellung*“ oder „*Impulsdarstellung*“). In diesem Artikel betrachten wir einen nur zweidimensionalen Hilbertraum<sup>2</sup>. Des weiteren folgt aus der Vektorraumstruktur von  $\mathcal{H}$ , dass jede (wieder auf 1 normierte) Linearkombination von Zustandsvektoren wieder ein Zustandsvektor ist.

Bisher haben unsere Betrachtungen aber noch nicht genau erklärt, welches Ergebnis eine Messung zur Folge hat. Befindet sich das untersuchte Teilchen in einem Eigenzustand des Operators, so ist das Messergebnis der zum Eigenzustand gehörige Eigenwert.

Befindet sich das Teilchen aber nicht in einem Eigenzustand des Messoperators, so ist das Messergebnis a priori nicht definiert; wie oben erwähnt kann auch dieser Zustand trotzdem als Linearkombination von Eigenvektoren des Messoperators geschrieben werden. Man kann dann aber nicht vorhersagen, welches Ergebnis eine quantenme-

---

<sup>1</sup>Impuls ist die Geschwindigkeit des Objektes multipliziert mit seiner Masse

<sup>2</sup>Physikalische Entsprechung wäre der Eigenraum des Spin-Operators für ein (bzw. zwei) Teilchen mit Spin  $s = \frac{1}{2}$

chanische Messung hat, sondern nur eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der möglichen Messergebnisse angeben. Um nun eine Messung in der Theorie zu implementieren, wendet man eine Matrix (*Projektor*) auf den Zustandsvektor an, welche diesen in einen der Eigenzustände des Operators transformiert. Man berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen im Zustand  $\psi$  nach einer Messung im Eigenzustand  $\varphi$  des hermiteschen Messoperators  $M$  befindet, mit der sogenannten BORN'schen Regel

$$p(\psi \rightarrow \varphi) = |\varphi^\dagger \cdot \psi|^2. \quad (1)$$

Hierbei ist  $\varphi^\dagger$  der zu  $\varphi$  duale (bzw. adjungierte) Zustand. Nach einer Messung ist der Zustand auf einen der Eigenzustände des Messoperators festgelegt: Wenn wir direkt im Anschluss die selbe Messung nochmals durchführen, werden wir immer das selbe Ergebnis erhalten. Das bedeutet also, dass eine Messung einen Zustand nicht nur ermittelt (wie in der klassischen Mechanik), sondern ihn auch beeinflusst. Misst man nur ein einziges Teilchen, so kann man nicht feststellen, ob es sich vor der Messung bereits im gemessenen Eigenzustand befunden hat, oder ob es nur zufällig zum gemessenen Ergebnis kam.

Natürlich kann sich ein Zustand auch ohne eine Messung verändern. Diese Veränderungen werden durch unitäre Operatoren (die die Normierung erhalten) dargestellt, zum Beispiel der Zeitentwicklungsoperator.

Wir wollen diese Einführung in die Grundlagen der Quantenmechanik hier beenden. Es sei jedoch angemerkt, dass diese nur einen kurzen Überblick liefern sollte und nur als „Crashkurs“ für Leser mit Kenntnissen in Mathematik-Grundvorlesungen gedacht ist. Für eine vollständige, rigorose und physikalisch motivierte Einführung sei auf die zahlreich vorhandenen Lehrbücher zu diesem Thema verwiesen.

Bevor wir diese Erkenntnisse nun auf die Spieltheorie anwenden, sollen sie nochmal an einem Beispiel verdeutlicht werden.

## 2.2 Beispiel: Quantenmünze

In diesem Beispiel untersuchen wir zunächst eine klassische Münze im oben beschriebenen Formalismus, um erste einfache Rechnungen mit diesem einzuführen. Dann wenden wir die oben kennengelernten Grundlagen auf eine „Quantenmünze“ an. Eine physikalische Entsprechung der Quantenmünze wäre z. B. dabei die z-Komponente des Elektronenspins.

Wir stellen uns zunächst eine normale, „klassische“ Münze vor. Diese hat zwei mögliche (orthogonale) Zustände, „Kopf“ und „Zahl“, die wir mit  $k$  und  $z$  abkürzen wollen. Diese können wir als Vektoren wie folgt schreiben:

$$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Wir können den einen Zustand in den anderen überführen, indem wir die Münze umdrehen. Diese Aktion geschieht durch die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

wie man durch Anwendung von  $F$  auf die beiden Vektoren schnell ausrechnen kann:  $Fk = z$ ,  $Fz = k$ . Auch das Liegenlassen der Münze können wir durch eine Matrix beschreiben, nämlich einfach durch die Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$ . Diese beiden Matrizen lassen sich zu einer so genannten Wahrscheinlichkeitsmatrix

$$W = (1 - p)\mathbb{1} + pF = \begin{pmatrix} (1 - p) & p \\ p & (1 - p) \end{pmatrix} \quad (4)$$

vereinigen, wobei  $p$  die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Münze umgedreht wird.

Damit sind alle Möglichkeiten, den Zustand einer Münze darzustellen und zu verändern, erfasst: Es gibt nur zwei mögliche Zustände, die durch eine entsprechende Matrix in den jeweils anderen umgewandelt oder einfach beibehalten werden.

Nun wollen wir eine „Quantenmünze“<sup>3</sup> betrachten. Wieder ordnen wir den jeweiligen Zuständen wie bereits in Gleichung (2) die Einheitsvektoren  $k$  und  $z$  zu, die jetzt die Basis eines zweidimensionalen Hilbertraums über  $\mathbb{C}$  bilden. Diese beiden Einheitsvektoren sind die beiden Eigenzustände der Messung, die feststellt, welche „Seite der Quantenmünze“ nach oben zeigt. Wie im vorhergehenden Abschnitt bereits beschrieben wurde, ist nun auch jede auf  $\mathbb{1}$  normierte Linearkombination dieser Zustände ein zulässiger Zustand. Ein Beispiel dafür wäre der Zustand

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

der so kaum Entsprechung für eine klassische Münze hat. Es wäre zwar vorstellbar, dass die klassische Münze auf ihrer Kante steht; wollte man in diesem Zustand aber feststellen, ob Kopf oder Zahl oben liegt, so gäbe es keine definierte Antwort. Spätestens bei negativen oder imaginären Koeffizienten allerdings gibt es keine klassische Interpretation mehr.

Trotz der Superposition von Zustandsvektoren sind weiterhin *nach* einer Messung der nach oben zeigenden Seite nur die Eigenvektoren der Messung,  $k$  und  $z$ , möglich.

Was ist nun die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung z. B.  $k$  als Ergebnis zu erhalten? Nach Gleichung (1) berechnet sich diese zu

$$p(b \rightarrow k) = \left| (1, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Bei Messungen des Zustandes  $b$ , welche Seite nun nach oben zeigt, ergeben also 50% der Messungen „Kopf“ und (evtl. nach analoger Rechnung) 50% „Zahl“.

Da nun auch andere Zustände als die beiden Basiszustände angenommen werden können, fällt auch die Beschränkung bei den „zulässigen Aktionen“: Jede unitäre Matrix ist prinzipiell erlaubt.

Es sei noch erwähnt, dass der Begriff „Messung“ in diesem Zusammenhang missverständlich ist, da er das Verwenden von technischen Messgeräten zu implizieren

<sup>3</sup>In der Quanteninformationstheorie nennt man ein solches Objekt „Qubit“ (Quanten Bit)

scheint. Tatsächlich wird der Begriff „Messung“ in der Quantenmechanik ganz allgemein verwendet, das heißt unabhängig von der technischen Realisierung der Messung. In unserem Fall der „Quantenmünze“ ist die Messung das bloße Betrachten der Münze.

Nachdem wir uns mit diesem Beispiel mit dem Konzept und dem Formalismus der Quantenmechanik vertrauter gemacht haben, wenden wir jetzt das Beispiel der Quantenmünze für ein erstes Quantenspiel an

### 3 Ein Münzspiel

Wir wollen im Folgenden das Münzspiel betrachten, mit dem DAVID MEYER 1999 den Begriff der Quantenstrategie eingeführt hat. Wie bei den weiteren Beispielen wird zunächst das klassische Spiel so beschrieben, dass es mit einer normalen Münze gespielt werden kann. Dann tauschen wir diese Münze durch eine Quantenmünze aus, wodurch wir ein Quantenspiel erhalten.

#### 3.1 Die klassische Variante

In seinem Artikel „Quantum Strategies“ [M] beschreibt MEYER folgendes Spiel, das er zwischen den „Star Trek“-Charakteren „Captain Picard“ (Spieler 1) und „Q“ (Spieler 2) austragen lässt: Beide Spieler sitzen sich gegenüber. Spieler 1 nimmt eine Münze und legt sie mit der Seite „Kopf“ nach oben in ein kleines Kästchen. Dieses ermöglicht den Spielern, die Münze zu drehen, hält aber stets den Zustand der Münze verdeckt. Dieses Kästchen übergibt er dann Spieler 2. Spieler 2 kann nun die durch das Kästchen verdeckte Münze entweder umdrehen (F - „flip“) oder liegen lassen (N - „not flip“), ohne dass Spieler 1 diese Entscheidung erkennen kann. Er übergibt daraufhin das Kästchen wieder Spieler 1, welcher auf die selbe Art und Weise wie Spieler 2 die Münze verdeckt umdrehen oder liegen lassen kann. Darauf reicht er den Kasten wieder Spieler 2, welcher ein letztes Mal vor die Wahl gestellt wird, die verdeckte Münze zu wenden oder liegen zu lassen. Dann öffnet er den Kasten und deckt so die Münze wieder auf. Zeigt die Münze wie zu Beginn des Spiels „Kopf“, so gewinnt Spieler 2, zeigt sie jedoch „Zahl“, gewinnt Spieler 1.

Es sei nochmal betont, dass in diesem Spiel der Status der Münze bis zum Öffnen des Kästchens unbekannt ist. Das heißt, dass (z. B. durch einen geeigneten Drehmechanismus in dem Kästchen) sichergestellt wird, dass beide Spieler beim Umdrehen der Münze nicht durch Ertasten o. ä. den Zustand erkennen können.

In diesem extensiven Nullsummenspiel gibt es dann keine dominante Strategie, und damit kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Das lässt sich leicht an der Auszahlungsmatrix (der Normalform) überprüfen:

	NN	NF	FN	FF
N	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
F	(1,-1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)

Nach VON NEUMANN existiert aber in gemischten Strategien immer ein Nash-Gleichgewicht. In unserem Beispiel ist dieses offensichtlich erreicht, wenn sowohl Spieler

1 als auch 2 bei jedem Zug mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit entweder  $F$  oder  $N$  spielen. Desweiteren sei angemerkt, dass dieses Spiel ein Spiel mit unvollkommener Information ist, da beide Spieler die Züge ihres Gegners nicht einsehen können.

Wenden wir nun den in Abschnitt 2.2 eingeführten Formalismus auf dieses Problem an, und zwar zunächst mit einer klassischen Münze. Der Münze wird zu Beginn des Spiels der Vektor  $k$  zugeordnet. Nacheinander wirken auf diesen Vektor für jeden der insgesamt drei Spielzüge jeweils entweder die Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  oder die Matrix  $F$ ; jeder Strategie wird also eine Matrix zugeordnet. Gemischte Strategien lassen sich dann durch Wahrscheinlichkeitsmatrizen ausdrücken. Spielen jetzt beide Spieler das Nash-Gleichgewicht, welches nach obigen Ergebnissen und Gleichung (4) die Wahrscheinlichkeitsmatrix

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

ist, wird dieses  $W$  dreimal hintereinander auf den Vektor  $k$  angewendet, welcher dann am Ende des Spiels zu 50% immernoch  $k$  zeigt. Der Verlauf des Spieles lässt sich daher wie folgt darstellen (der Index der Matrizen gibt an, welcher Spieler diese Strategie spielt):

$$W_2 W_1 W_2 k = \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} z \quad (8)$$

Spielen wir dieses Spiel mit einer normalen Münze, haben wir also das selbe Ergebnis wie z. B. bei dem Spiel „Matching Pennies“: Die eine Hälfte der Spiele gewinnt Spieler 1, die andere Spieler 2. Diese Situation verändert sich aber deutlich, wenn wir mit einer Quantenmünze spielen.

### 3.2 Die Quanten-Variante

Verwendet man nun statt der normalen Münze eine Quantenmünze, startet das Spiel mit dem Eigenvektor  $k$  aus einem zweidimensionalen Hilbertraum über  $\mathbb{C}$ , auf den dreimal hintereinander Operatoren wirken. Im Gegensatz zu dem oben beschriebenen Spiel mit einer normalen Münze fallen jetzt (siehe Abschnitt 2.1) zwei wichtige Einschränkungen weg: Es können auch (normierte) Linearkombinationen ein Zustand sein, welche mit allen unitären Matrizen beeinflusst werden dürfen. Welche Konsequenzen hat das? Natürlich können wir mit einer Quantenmünze genauso das klassische Spiel spielen, indem wieder jeder Spieler bei jedem Zug die oben genannte Matrix  $W$  spielt. Doch das fügt dem Spiel nichts neues hinzu. Um die Möglichkeiten des dramatisch vergrößerten Strategieraums zu demonstrieren, untersucht MEYER nun den Fall, dass Spieler 1 (im Gegensatz zu Spieler 2) nicht weiß, dass es sich nicht um eine normale, sondern eine Quantenmünze handelt. Das heißt, wir nehmen an, dass Spieler 1 weiterhin nur mit den Matrizen  $F$  oder  $\mathbb{1}$  (bzw. mit der Wahrscheinlichkeitsmatrix  $W$ ) spielt, während Spieler 2 alle unitären Matrizen zur Verfügung stehen. Diesen Vorteil kann er nun geschickt nutzen: Statt der Wahrscheinlichkeitsmatrix  $W$ , die Spieler 1 für die beste Strategie hält und daher auch spielt, wählt Spieler 2 für seine beiden Züge die Matrix

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Dieser auch HADAMARD-Matrix genannte Operator ergibt, angewendet auf unseren Anfangszustand, gerade den Zustand  $b$  aus Gleichung (5). Wir wollen nun den Verlauf dieses Spieles (mit der selben Notation wie in Gleichung (8)) explizit darstellen:

$$\begin{aligned}
H_2 W_1 H_2 k &= H_2 W_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= H_2 W_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{(5)}{=} H_2 W_2 b \\
&= H_2 \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} b & (10) \\
&= H_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-p+p \\ p+1-p \end{pmatrix} = H_2 b \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= k & (11)
\end{aligned}$$

Das ist ein bemerkenswertes Ergebnis: Unabhängig von der Wahrscheinlichkeit  $p$ , mit der Spieler 1 die Münze umdreht, zeigt die Münze nach diesem Spiel immer „Kopf“. Das bedeutet, dass Spieler 2 immer gewinnt, egal welchen der klassisch erlaubten Spielzüge Spieler 1 macht. Die (Quanten-) Strategie  $H$  dominiert also die (klassische) Strategie  $W$ .

Der Grund, warum die Strategie  $H$  gewinnt, liegt in der Tatsache, dass sie den Zustandsvektor  $k$  zu  $b$  transformiert.  $b$  ist nämlich ein Eigenvektor der Matrizen  $\mathbb{1}$ ,  $F$  und damit auch von  $W$ : Wie man in Gleichung (10) sieht, lässt die Matrix  $W$  den Zustandsvektor  $b$  unverändert. Da  $H$  unitär und selbstadjungiert ist, gilt

$$HH = H^* H = \mathbb{1}. \quad (12)$$

Dadurch bleibt der ursprüngliche Zustand  $k$  erhalten und Spieler 2 wird immer gewinnen. Die Quantenstrategie  $H$  dominiert also die bisher beste Strategie  $W$ . Es lässt sich sogar allgemein zeigen, dass die bestmögliche Quantenstrategie immer mindestens so gut ist wie die bestmögliche klassische Strategie. Dieser Umstand folgt aus der Tatsache, dass jede klassische Strategie durch eine Quantenstrategie realisiert werden kann, da die Menge der klassischen Strategien eine Untermenge der Quantenstrategien ist.

Nach mehrmaligem Spielen wird Spieler 1 natürlich den Verdacht schöpfen, dass Spieler 2 ihn durch Manipulation der Münze betrügt. Um das zu überprüfen, öffnet er heimlich das Kästchen, sobald er es nach dem erstem Spielzug bekommt. Dieses „Öffnen und Nachschauen“ ist jedoch eine Messung der Münze. Wie wir in Gleichung (6) gesehen haben, wird Spieler 1 bei dieser Messung mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit die Münze entweder im Zustand  $k$  oder  $z$  vorfinden, also genau das selbe Ergebnis wie bei der Strategie  $W$ . Er kann Spieler 2 also keinen Betrug nachweisen, da es



keine Möglichkeit gibt, durch die Messung eines einzigen Zustandes festzustellen, wie dieser vor der Messung war (vgl. Abschnitt 2.1). Durch das unerlaubte Messen der Quantenmünze hat 1 jetzt aber deren Zustand auf entweder  $k$  oder  $z$  geändert. Wendet Spieler 2, der das heimliches Öffnen des Kästchens durch Spieler 1 nicht bemerkt hat, jetzt wieder die Matrix  $H$  auf die Quantenmünze an, transformiert der Zustand je nach Messergebnis von Spieler 1 entweder zu  $b$  oder zu

$$b' = H z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

In beiden Fällen zeigt uns Gleichung (6), dass wieder beide Spieler gleiche Gewinnwahrscheinlichkeiten haben. Sollte Spieler 1 also wider Erwarten doch einmal gewinnen, kann Spieler 2 sicher sein, dass Spieler 1 heimlich den Zustand der Münze überprüft hat.

Betrachten wir nun die bisherigen Ergebnisse dieses Spiels aus der Perspektive der Spieltheorie. Wie auch die klassische Variante ist unser Münzspiel in seiner Quantenversion ein extensives Nullsummenspiel mit unvollkommener Information. In der oben von uns vorgestellten Variante, dass nur Spieler 2 Quantenstrategien spielen darf, gibt es jedoch einen wichtigen Unterschied: Für Spieler 1 ist es auch ein Spiel mit unvollständiger Information, da er nicht über die zusätzlichen Möglichkeiten, die Spieler 2 hat, Bescheid weiß. Dieser Umstand ist alleinig dafür verantwortlich, dass Spieler 2 immer gewinnt. Um das zu sehen, nehmen wir an, dass Spieler 1 von Spieler 2 über die Quantennatur der Münze aufgeklärt wurde und jetzt beide Spieler im vollem Umfang Quantenstrategien anwenden können. Spielen beide immer die Strategie  $H$ , so folgt mit Gleichung (12):

$$H_2 H_1 H_2 k \stackrel{(12)}{=} H_2 k = b \quad (14)$$

Mit Gleichung (6) zeigt sich, dass nun wieder beide Spieler gleiche Gewinnchancen haben.

Es stellt sich nun die Frage, ob es in dieser Situation, in der beide Spieler Quantenstrategien wählen dürfen, vielleicht ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien geben kann. MEYER beweist in seinem Artikel, dass dies nicht notwendigerweise der Fall ist:

**Satz:** Ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel hat im Allgemeinen kein Nash-Gleichgewicht in reinen Quantenstrategien.

*Beweis:* Wir beweisen diesen Satz, indem wir zeigen, dass das hier untersuchte Spiel kein Nash-Gleichgewicht in reinen Quantenstrategien haben kann:

Seien  $U_{2a}, U_{2b}, U_1$  drei beliebige, unitäre  $2 \times 2$ -Matrizen. Nehmen wir nun an, dass (mit der aus Gleichung (8) bekannten Notation)

$$U_{2b} U_1 U_{2a} k \neq k$$

gelte, also dass Spieler 2 (zumindest mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit) verliert. Spieler 2 kann sich nun aber verbessern, indem

er statt seiner bisherigen Strategie  $U_{2b}$  die Strategie  $U'_{2b} = U_{2a}^{-1} U_1^{-1}$  spielt, da mit dieser die Gleichung (3.2) wieder  $k$  zum Ergebnis hat.

Ähnliches gilt auch aus der Sicht von Spieler 1. Nehmen wir an es gelte

$$U_{2b} U_1 U_{2a} k \neq z.$$

Spieler 1 braucht dann nur  $U_1$  durch  $U'_1 = U_{2b}^{-1} F U_{2a}^{-1}$  zu ersetzen, womit dann Gleichung (3.2)  $z$  zum Ergebnis hat.

Das heißt, dass beide Spieler sich durch geschickte Wahl ihrer Matrizen immer auf die Auszahlung 1 verbessern können. Somit kann es kein Nash-Gleichgewicht in reinen Quantenstrategien geben.

□

Mit dem Beweis dieses Satzes sehen wir sofort, dass  $(H, H)$  kein Nash-Gleichgewicht in dem oben beschriebenen Münzspiel sein kann.

Es lässt sich jedoch beweisen, dass es ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Quantenstrategien geben muss, wobei dieser Beweis völlig analog zu demselben Beweis für Nicht-Quantenstrategien geführt wird.

## 4 Das Gefangenendilemma

Nachdem wir das Konzept der Quantenmünze in dem von DAVID MEYER entworfenen Spiel kennenlernen konnten, wollen wir uns nun einem etwas anspruchsvolleren Quantenspiel zuwenden. In ihrem Artikel „Quantum Games and Quantum Strategies“ [EWL] stellen J. EISERT, M. WILKENS und M. LEWENSTEIN eine Quanten-Variante des Gefangenendilemmas vor. Bevor wir dieses Beispiel jedoch behandeln können, muss zunächst noch der Begriff der „Verschränkung“ eingeführt werden.

### 4.1 Verschränkung

Nach der Untersuchung eines einzigen Quantenobjektes wollen wir nun sehen, wie man ein zusammenhängendes System zweier Quantenobjekte (im folgenden als 1 und 2 bezeichnet) beschreiben kann. Da jeder dieser Zustände ein Vektor in einem eigenen Hilbertraum ist, lässt sich der Raum des Gesamtsystems als ein Tensorprodukt dieser Zustandsräume darstellen:  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Wie sieht nun der Zustand eines solchen Systems aus? Nehmen wir an, wir betrachten ein System aus zwei der oben beschriebenen Quantenmünzen. Zeigt die erste Münze „Kopf“ und die zweite „Zahl“, lässt sich dieser Zustand dann schreiben als  $(k \otimes z)$ . Es gelten hier aber natürlich auch die im ersten Kapitel beschriebenen Eigenschaften der Hilberträume (Linearkombinationen, etc.). Darum ist auch der folgende Zustand ein gültiger Zustand unseres Systems aus zwei Quantenmünzen:

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(k \otimes z - z \otimes k). \quad (15)$$

Dieser Zustand hat eine besondere Eigenschaft: Obwohl er Element des Hilbertraums  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  ist, können wir ihn nicht in der Form  $a_1 \otimes a_2$ , also als Tensorprodukt zweier Vektoren der jeweiligen Hilberträume schreiben. Man bezeichnet solche Zustände als *verschränkt*.

Diese Verschränkung zweier Quantenzustände führt zu denjenigen Phänomenen der Quantenmechanik, die wohl am meisten unseren intuitiven Vorstellungen von der Natur widersprechen. Sie hat nämlich eine verblüffende Konsequenz: Trennt man zwei verschränkte Quantenobjekte voneinander, bleiben die Zustände dennoch voneinander abhängig. Verändert man also den einen Zustand, hat dies eine entsprechende Änderung des anderen zur Folge, unabhängig davon, wie groß der Abstand zwischen den Zuständen ist. Dieser von ERWIN SCHRÖDINGER entdeckte Umstand stieß zunächst auf große Skepsis, sogar EINSTEIN bezweifelte diese „spukhafte Fernwirkung“. Mittlerweile ist dieser Effekt jedoch auch experimentell bestätigt worden und bildet unter anderem die Grundlage vieler Konzepte der Quanteninformationstheorie.

## 4.2 Das Quanten-Gefangenendilemma

Die Verschränkung spielt eine entscheidende Rolle in der von EISERT ET AL. beschriebenen Quantenversion des Gefangenendilemmas. Um dies zu demonstrieren, konstruieren die Autoren ähnlich wie MEYER einen Spielaufbau, der sowohl das klassische Spiel als auch das Quantenspiel (sowohl mit verschränkten als auch mit nicht verschränkten Zuständen) ermöglicht.

Dem Aufbau liegt ein klassisches Gefangenendilemma mit den bekannten Strategien „Kooperieren“ und „Defektieren“ und folgender Auszahlungsmatrix zugrunde:

	Kooperieren	Defektieren
Kooperieren	(3,3)	(0,5)
Defektieren	(5,0)	(1,1)

Der Ablauf des Spiels wird wie folgt festgelegt: Zwei Quantenmünzen werden von einer neutralen dritten Person (dem Schiedsrichter) im Zustand  $k$  (Kopf) in einem System präpariert:  $(k \otimes k)$ . Der Schiedsrichter wendet dann darauf einen unitären Operator  $J$  an, der gleichzeitig und symmetrisch auf beide Zustände wirkt. Dieser Operator dient dem Schiedsrichter dazu, die beiden Zustände nach seinem Belieben zu verschränken. Danach gibt er jedem der Spieler eine dieser Quantenmünzen. Die Spieler können nun auf ihre Quantenmünze eine unitäre  $2 \times 2$ -Matrix  $U$  anwenden. Danach übergeben sie ihre Münze wieder dem Schiedsrichter, der den unitären Operator  $J^\dagger$  auf die Quantenmünzen anwendet und schließlich deren Zustände misst. Das heißt also, dass die Spieler ihre Entscheidung durch den Zustand der Quantenmünze mitteilen.

Nach der Messung haben die Münzen jeweils entweder den Zustand  $k$  oder  $z$ , was den Regeln entsprechend mit „Kooperation“ oder „Defektion“ identifiziert wird. Abschließend werden je nach Ergebnis die in der obigen Bimatrix genannten Auszahlungen zugeteilt. Wie auch im Fall des klassischen Gefangenendilemmas sind beiden Spielern diese Regeln im vollen Umfang bekannt, ebenso der verschränkende Operator

J. Der Verlauf des Spiels lässt sich damit so darstellen:

$$J^\dagger(U_1 \otimes U_2)J(k \otimes k) =: f. \quad (16)$$

Mit  $f$  wollen wir ab jetzt den Endzustand des Systems beider Münzen *direkt vor der Messung* bezeichnen. Zusammen mit den Auszahlungen der obigen Tabelle ergeben sich als Nutzenfunktion der beiden Spieler:

$$u_1 = 3p_{kk} + 1p_{zz} + 0p_{kz} + 5p_{zk} \quad (17)$$

$$u_2 = 3p_{kk} + 1p_{zz} + 5p_{kz} + 0p_{zk} \quad (18)$$

Dabei sind  $p_{xy}$  die Wahrscheinlichkeiten, im Zustand  $f$  als Messergebnis den Zustand  $(x \otimes y)$  zu erhalten ( $x, y \in \{C, D\}$ ). Nach Gleichung 1 berechnet sich diese zu

$$p_{xy} = |(x^\dagger \otimes y^\dagger) \cdot f|^2 \quad (19)$$

Betrachten wir nun alle in diesem Spiel vorkommenden Operatoren genauer. Die unitären Matrizen, die ein Spieler  $j \in \{1, 2\}$  auf seine Quantenmünze anwenden kann, beschränken wir hier auf zweiparametrische Matrizen

$$U_j(\theta_j, \varphi_j) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_j} \cos(\theta_j/2) & \sin(\theta_j/2) \\ -\sin(\theta_j/2) & e^{-i\varphi_j} \cos(\theta_j/2) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

mit  $0 \leq \theta \leq \pi$  und  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Jeder Spieler wählt also seine Strategie, indem er jeweils einen Wert für  $\theta_j$  und  $\varphi_j$  bestimmt. Diese Darstellung in Abhängigkeit von  $\theta_j$  und  $\varphi_j$  erlaubt uns später eine kompakte und allgemeine Darstellung der Wahrscheinlichkeiten.

Wie man leicht sieht, können so auch wieder Matrizen zum Umdrehen und Liegenlassen einer Quantenmünze beschrieben werden:

$$U(0, 0) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}, \quad (21)$$

$$U(\pi, 0) = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Um das „Quantenmechanische Gefangenendilemma“ zu motivieren, wollen wir sinnvollerweise die Forderung stellen, dass mit dem hier beschriebenen Aufbau auch das klassische Gefangenendilemma gespielt werden kann. Die beiden dafür notwendigen Strategien haben wir bereits mit den Matrizen  $C$  und  $D$  kennengelernt. Um auch die klassischen Regeln umsetzen zu können, müssen wir dagegen Anforderungen an  $J$  stellen.

Eine wichtige Regel in der klassischen Version ist die Unabhängigkeit der Entscheidungen der Spieler voneinander: Die Strategiewahl von Spieler 1 darf die Strategiewahl von Spieler 2 nicht verändern und umgekehrt. Im Formalismus des Quantenspiels fordert man daher, dass die in Gleichung (19) berechnete Wahrscheinlichkeit *faktorisieren* muss, damit die stochastische Unabhängigkeit gewährleistet ist. Das bedeutet,

dass die Wahrscheinlichkeit eines Messergebnisses das Produkt der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der Spieler ist:

$$p_{xy}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) = p_x(\theta_1, \varphi_1) \cdot p_y(\theta_2, \varphi_2) \quad (23)$$

Um die aus dieser Forderung entstehenden Konsequenzen für  $J$  zu zeigen, setzen wir die aus Gleichung (16) bekannte Definition von  $f$  in die zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit verwendete Gleichung (19) ein:

$$p_{xy} = |(x^\dagger \otimes y^\dagger) \cdot J^\dagger(U_1 \otimes U_2)J(k \otimes k)|^2 \quad (24)$$

Diese Gleichung faktorisiert genau dann, wenn  $J$  mit  $C$  und  $D$  gemeinsame Eigenvektoren hat, da in allen anderen Fällen Mischterme entstehen.

Diese Bedingungen werden durch folgenden Operator erfüllt:

$$\begin{aligned} J(\gamma) &= \exp\left(\frac{i\gamma}{2} D \otimes D\right) \\ &= \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) C \otimes C + i \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) D \otimes D \end{aligned} \quad (25)$$

Dabei ist  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ein Maß für die Verschränktheit der beiden Zustände: Für  $\gamma = 0$  sind die Zustände überhaupt nicht, für  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  vollständig miteinander verschränkt<sup>4</sup>. Letzteres sieht man leicht, wenn man mit  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  den Operator  $J$  auf den Zustand  $k \otimes k$  wirken lässt. Wegen  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ergibt sich nämlich:

$$J(k \otimes k) = \frac{1}{\sqrt{2}}((k \otimes k) + i(z \otimes z)) \quad (26)$$

Dieser Zustand ist nicht mehr durch ein Tensorprodukt zweier Vektoren getrennter Hilberträume darstellbar (siehe Gleichung 15) und daher verschränkt.

Der Schiedsrichter hat nun also einen Operator  $J$  zur Verfügung, der beiden Spielern bekannt ist und durch die Wahl eines Parameters einen beliebigen Grad an Verschränkung der beiden Quantenmünzen ermöglicht, sowie auch die rein klassische Variante als Spielmöglichkeit zulässt. Als nächstes wollen wir nun sehen, welche neuen Möglichkeiten dieses Quantenspiel uns bietet.

## 4.3 Neue Strategien

### 4.3.1 Unverschränkte Zustände

Wir wollen zunächst den Fall  $\gamma = 0$  studieren. Wie man schnell sieht, vereinfacht sich in diesem Fall  $J$  zur Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  und der gemeinsame Zustand der Quantenmünzen der Spieler ist  $(k \otimes k)$ . Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeiten  $p_{xy}$  der

---

<sup>4</sup>Der Grad der Verschränkung gibt an, wie sehr eine Veränderung eines der beiden verschränkten Zustände den anderen beeinflusst.

jeweiligen Strategiekombinationen. Dafür berechnen wir zunächst  $f$ , den Zustand vor der Messung:

$$\begin{aligned}
f &= J^\dagger(U_1 \otimes U_2)J(k \otimes k) \\
&= \mathbb{1}(U_1 \otimes U_2)\mathbb{1}(k \otimes k) \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} \cos(\theta_1/2) \\ -\sin(\theta_1/2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} \cos(\theta_2/2) \\ -\sin(\theta_2/2) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{27}$$

Damit ergeben sich dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten nach Gleichung (19). Zum Beispiel berechnet sich  $p_{kk}$  zu

$$\begin{aligned}
p_{kk} &= |(k^\dagger \otimes k^\dagger) \cdot f|^2 \\
&= \left| (1,0) \otimes (1,0) \cdot \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} \cos(\frac{\theta_1}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta_1}{2}) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} \cos(\frac{\theta_2}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta_2}{2}) \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= |e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2)|^2 \\
&= |\cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2)|^2.
\end{aligned} \tag{28}$$

Die anderen Wahrscheinlichkeiten sind

$$p_{kz} = |\cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)|^2, \tag{29}$$

$$p_{zk} = |\sin(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2)|^2, \tag{30}$$

$$p_{zz} = |\sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)|^2. \tag{31}$$

Man erkennt, dass die Wahrscheinlichkeiten faktorisieren, unabhängig von der Wahl der Parameter:  $|\cos(\theta_j/2)|^2 =: p_j$  ist für Spieler  $j$  die Wahrscheinlichkeit zu kooperieren,  $|\sin(\theta_j/2)|^2 = 1 - p_j$  entsprechend die Wahrscheinlichkeit zu defektieren und  $p_{xy}$  einfach das Produkt der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der beiden Spieler. Darüber hinaus hat die Wahl von  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  keinerlei Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten.

Das bedeutet, dass  $\gamma = 0$  uns erlaubt, das klassische Gefangenendilemma zu spielen: Durch die Wahl von  $\theta_i$  können beide Spieler unabhängig voneinander ihre Wahrscheinlichkeit zur Kooperation bzw. Defektion bestimmen.

Die Quantenversion des Gefangenendilemmas unterscheidet sich also nicht von der klassischen Variante, wenn die beiden Zustände nicht miteinander verschränken. Wir wollen nun sehen, was für  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  gilt.

### 4.3.2 Verschränkte Zustände

Setzt der Schiedsrichter  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , so gilt für  $J$ :

$$\begin{aligned}
J &= \exp\left(\frac{i\pi}{4}D \otimes D\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}((C \otimes C) + i(D \otimes D))
\end{aligned} \tag{32}$$

Analog gilt für  $J^\dagger$ :

$$\begin{aligned}
J^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}((C^\dagger \otimes C^\dagger) - i(D^\dagger \otimes D^\dagger)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}((C \otimes C) - i((-D) \otimes (-D))) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}((C \otimes C) - i(D \otimes D)) \tag{33}
\end{aligned}$$

Man kann schnell erkennen, dass die Matrix  $J$  den Zustand  $(k \otimes k)$  verschränkt. Der Zustand  $f$  nimmt damit nämlich folgende Struktur an:

$$\begin{aligned}
f &= J^\dagger(U_1 \otimes U_2)J(k \otimes k) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} \cos(\theta_1/2) \\ -\sin(\theta_1/2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} \cos(\theta_2/2) \\ -\sin(\theta_2/2) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sin(\theta_1/2) \\ e^{-i\varphi_1} \cos(\theta_1/2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin(\theta_2/2) \\ e^{-i\varphi_2} \cos(\theta_2/2) \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sin(\theta_1/2) \\ e^{i\varphi_1} \cos(\theta_1/2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sin(\theta_2/2) \\ e^{i\varphi_2} \cos(\theta_2/2) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_1} \cos(\theta_1/2) \\ -\sin(\theta_1/2) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_2} \cos(\theta_2/2) \\ -\sin(\theta_2/2) \end{pmatrix} \tag{34}
\end{aligned}$$

Damit lassen sich nach Gleichung (19) die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Messergebnisse berechnen, mit folgenden Ergebnissen:

$$p_{kk} = |\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2)|^2 \tag{35a}$$

$$p_{kz} = |\sin(\varphi_2) \sin(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) - \cos(\varphi_1) \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)|^2 \tag{35b}$$

$$p_{zk} = |\sin(\varphi_1) \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) - \cos(\varphi_2) \sin(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2)|^2 \tag{35c}$$

$$p_{zz} = |\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) + \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)|^2 \tag{35d}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten faktorisieren nun *nicht*, da sich z. B.  $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$  nicht als Produkt  $a_1(\varphi_1) \cdot a_2(\varphi_2)$  darstellen lässt. Das bedeutet für unser Spiel, dass die Strategien der Spieler auch die Messung der Quantenmünze des Gegners mit beeinflussen können. Wählen beide Spieler  $\varphi_j = 0$ , so ergibt sich wieder das klassische Spiel in gemischten Strategien, bei dem die Wahrscheinlichkeit der Kooperation  $p = |\cos(\theta/2)|^2$  ist.

Die Nutzenfunktionen der Spieler (vgl. Gleichung (17)) ergeben sich damit nach Auswertung aller  $p_{xy}$  für Spieler 1 zu

$$\begin{aligned}
u_1(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) &= 3p_{kk} + 5p_{zk} + 0p_{kz} + 1p_{zz} \tag{36} \\
&= 3|\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2)|^2 \\
&\quad + 5|\sin(\varphi_1) \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) - \cos(\varphi_2) \cos(\theta_2/2) \sin(\theta_1/2)|^2 \\
&\quad + 1|\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) + \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)|^2
\end{aligned}$$

und entsprechend für Spieler 2 zu

$$\begin{aligned}
u_2(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) &= 3p_{kk} + 0p_{zk} + 5p_{kz} + 1p_{zz} \\
&= 3|\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2)|^2 \\
&\quad + 5|\sin(\varphi_2) \sin(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) - \cos(\varphi_1) \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)|^2 \\
&\quad + 1|\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) + \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)|^2.
\end{aligned} \tag{37}$$

Wir untersuchen nun Spieler 1 (die Betrachtung von Spieler 2 führt zu analogen Ergebnissen). Der spieltheoretischen Annahme der Rationalität entsprechend versucht Spieler 1 seine Nutzenfunktion für die jeweiligen Strategien von Spieler 2 maximieren. Nehmen wir an, Spieler 2 spiele die Strategie  $D$  (also  $\theta_2 = \pi, \varphi_2 = 0$ ). Die beste Antwort darauf ist eine neue Strategie,

$$Q = U(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{38}$$

wie man leicht durch Einsetzen zeigen kann:

$$u_1(\theta_1, \varphi_1, \pi, 0) = 5|\sin(\varphi_1) \cos(\theta_1/2)|^2 + 1|\sin(\theta_1/2)|^2 \tag{39}$$

wird maximal für  $\theta_1 = 0, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  (und nicht für  $U(\pi, 0) = D$ , dem bisherigen Nash-Gleichgewicht). Auf die selbe Art und Weise zeigt man auch, dass, wenn Spieler 2  $C$  spielt, wie beim klassischen Gefangenendilemma  $D = U(\pi, 0)$  die beste Antwort darauf ist:

$$u_1(\theta_1, \varphi_1, 0, 0) = 3|\cos(\varphi_1) \cos(\theta_1/2)|^2 + 5|\sin(\theta_1/2)|^2 + 1|\sin(\varphi_1) \cos(\theta_1/2)|^2 \tag{40}$$

wird maximal für  $\theta_1 = \pi, \varphi_1 = 0$ .

Bei genauerer Betrachtung dieser Strategien stellt man fest, dass sie den Definitionsbereich der möglichen Strategien begrenzen: Aufgrund der Struktur des  $p_{zk}$ -Terms der Nutzenfunktion ist für Spieler 1 bei  $\theta_1 \neq 0$  für  $\varphi_1$  die beste Wahl  $\varphi_1 = 0$ . Gleiches gilt umgekehrt: Wählt Spieler 1 ein  $\varphi_1 \neq 0$ , führt eine andere Wahl als  $\theta_1 = 0$  zu einer niedrigeren Auszahlung. Das heißt, wir können die zweiparametrische Nutzenfunktion auf ein einparametrische reduzieren: Beide Spieler können aus Strategien von  $Q = U(0, \frac{\pi}{2})$  bis  $C = U(0, 0)$  und von  $C = U(0, 0)$  bis  $D = U(\pi, 0)$  wählen. Aufgrund dieser Tatsache lässt sich die Nutzenfunktion eines Spielers als übersichtlicher Plot zeichnen, der in Abbildung (1) dargestellt wird. Natürlich gilt das selbe auch für  $\gamma = 0$ , wie man in Abbildung (2) sehen kann. In diesem Plot ist auch gut die Unabhängigkeit der Auszahlung von  $\varphi_1$  zu erkennen.

#### 4.4 Ein neues Nash-Gleichgewicht

Wie oben bereits gezeigt wurde, ist  $Q$  die beste Antwort auf die Strategie  $D$  von Spieler 2. Im Gegensatz zum klassischen Gefangenendilemma kann  $(D \otimes D)$  nun also kein Nash-Gleichgewicht mehr sein. Die Vermutung liegt nahe, dass nun  $(Q \otimes Q)$  das neue



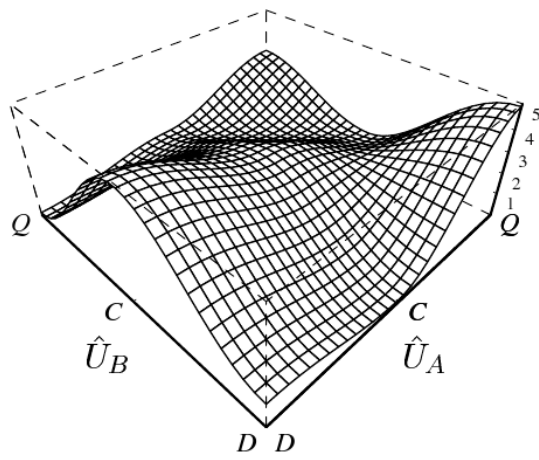


Abbildung 1: Nutzenfunktion bei  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  für Spieler 1 in Abhängigkeit von  $U_1$  (rechte Achse) und  $U_2$  (linke Achse). Nach [EWL]

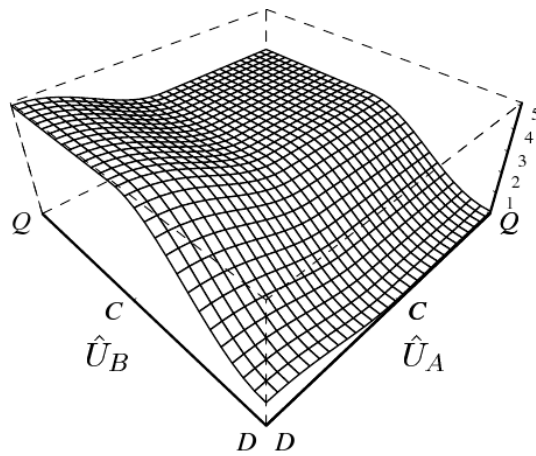


Abbildung 2: Nutzenfunktion bei  $\gamma = 0$  für Spieler 1 in Abhängigkeit von  $U_1$  (rechte Achse) und  $U_2$  (linke Achse). Nach [EWL]

Nash-Gleichgewicht des Spiels ist. Um das zu zeigen, betrachten wir zunächst die Nutzenfunktion von Spieler 1, wenn Spieler 2 die Strategie  $Q$  spielt:

$$\begin{aligned}
 u_1(\theta_1, \varphi_1, 0, \frac{\pi}{2}) &= 3|\cos(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \cos(\theta_1/2)|^2 + 1|\sin(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \cos(\theta_1/2)|^2 \\
 &= 3|\sin(\varphi_1) \cos(\theta_1/2)|^2 + 1|\cos(\varphi_1) \cos(\theta_1/2)|^2 \\
 &= \cos^2(\theta_1/2)(3 \sin^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_1)) \\
 &= \cos^2(\theta_1/2)(2 \sin^2(\varphi_1) + 1),
 \end{aligned} \tag{41}$$

Wie man aus Gleichung (37) leicht sieht, gilt der gleiche Zusammenhang auch für Spieler 2:

$$u_2(0, \frac{\pi}{2}, \theta_2, \varphi_2) = \cos^2(\theta_2/2)(2 \sin^2(\varphi_2) + 1) \tag{42}$$

In beiden Fällen hat  $u_j$  für die Strategie  $Q$  (also  $\theta_j = 0$  und  $\varphi_j = \frac{\pi}{2}$ ) den Wert  $u_j = 3$ . Offensichtlich gilt aber auch, dass  $u_j \leq 3$ , da für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:  $\cos(\alpha) \leq 1$  und  $\sin(\alpha) \leq 1$ . Für beide Spieler ist also  $Q$  die beste Antwort, wenn der jeweils andere auch  $Q$  spielt. Daher ist  $(Q \otimes Q)$  ein Nash-Gleichgewicht.

Das bedeutet also, dass es bei einem Quanten-Gefangenendilemma mit verschränkten Zuständen ein Nash-Gleichgewicht gibt, dass für beide Spieler die selbe Auszahlung hat wie  $(C \otimes C)$  (also „beide kooperieren“). Damit ist das Gefangenendilemma kein Dilemma mehr.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die oben genannten Eigenschaften (Nash-Gleichgewicht, etc.) nur im Fall der zweiparametrischen unitären Operatoren  $U_j$  als einzig erlaubte Strategien gültig sind. In [EW] wird gezeigt, dass für den allgemeinsten Fall, den dreiparametrischen unitären Strategien, für das Gefangenendilemma nur noch ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien existiert.

## 5 Das Angsthasenspiel (Game of Chicken)

Wir betrachten nun die Quantenversion eines anderen Spiels, nämlich des Angsthasenspiels.

### 5.1 Das klassische Spiel

Wir verwenden folgende Auszahlungsmatrix (aus [EW]):

	nicht ausweichen	ausweichen
nicht ausweichen	(0,0)	(4,1)
ausweichen	(1,4)	(3,3)

Bekanntlich hat dieses Spiel drei Nash-Gleichgewichte, nämlich:

- zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien: (nicht ausweichen ; ausweichen) und (ausweichen ; nicht ausweichen) mit Auszahlung  $u = (4, 1)$  bzw.  $u = (1, 4)$
- ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien mit je  $\frac{1}{2}$  Wahrscheinlichkeit, nicht auszuweichen; die Auszahlung beträgt dann  $u = (2, 2)$

## 5.2 Übertragung in die Quantenmechanik

Um keine unnötige Verwirrung zu stiften, identifizieren wir die Strategie „ausweichen“ mit C und die Strategie „nicht ausweichen“ mit D, die Vektoren bleiben gleich wie oben. Auch der Verschränkungsoperator  $J(\gamma)$  bleibe gleich wie beim Gefangenendilemma und wird ebenso angewendet. Wie oben ergibt sich dann für  $\gamma = 0$  wieder das klassische Spiel; bei unitären Matrizen  $U_i(\varphi_i, \theta_i)$  wie in Gleichung 20 können durch Wahl von  $\varphi = 0$  die gewöhnlichen klassischen Strategien gespielt werden. Im Folgenden wird nun maximale Verschränkung gewählt, d.h.  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . Der Erwartungswert der Auszahlung beträgt dann, analog zu Gleichung 36:

$$u_1(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) = 3p_{kk} + 4p_{zk} + 1p_{kz} + 0p_{zz} \quad (43)$$

Die Bedingungen für ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht  $(\theta_1^*, \varphi_1^*, \theta_2^*, \varphi_2^*)$  in reinen Quantenstrategien lauten:

$$\frac{\partial u_1(\theta_1^*, \varphi_1^*, \theta_2^*, \varphi_2^*)}{\partial \theta_1} = \frac{\partial u_1(\theta_1^*, \varphi_1^*, \theta_2^*, \varphi_2^*)}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (44)$$

$$\theta_1^* = \theta_2^* \quad , \quad \varphi_1^* = \varphi_2^*$$

Diese beiden Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \theta_1} &= \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_1/2) \cos^2(\theta_2/2) (1 - 3 \cos^2(\varphi_1 + \varphi_2) + 3 \cos^2(\varphi_2)) \\ &\quad - \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_1/2) \sin^2(\theta_2/2) (1 + 3 \sin^2(\varphi_1)) \\ &\quad - (\cos^2(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \cos(\theta_2/2)) \\ &\quad - \sin^2(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \cos(\theta_2/2) \cdot (\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + 4 \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_1} &= -3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cos^2(\theta_1/2) \cos^2(\theta_2/2) \\ &\quad + \frac{3}{2} \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \cos^2(\theta_1/2) \sin^2(\theta_2/2) \\ &\quad + \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \cos(\theta_2/2) (\sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) - 4 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2)) \end{aligned} \quad (46)$$

Wie man durch Einsetzen leicht nachrechnen kann, werden die Gleichungen 44 gelöst durch  $\theta_1^* = \theta_2^* = 0$ ,  $\varphi_1^* = \varphi_2^* = \pi/2$ . Die zu diesem Nash-Gleichgewicht gehörende Matrix ist zu finden in Gleichung 38. Es handelt sich damit also um ein symmetrisches Quanten-Gleichgewicht mit Erwartungswert der Auszahlung  $u = (3, 3)$ . Damit ist dieses Gleichgewicht für beide Spieler besser als das Gleichgewicht in gemischten Strategien des klassischen Spiels; außerdem ist es natürlich besser als das jeweils schlechtere der beiden Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

Allerdings ist die Auszahlung schlechter als die des „besseren“ klassischen Nash-Gleichgewichtes in reinen Strategien. Weicht einer der beiden Spieler, in der Hoffnung

dieses Gleichgewicht zu erreichen, auf D ab, so verschlechtert er damit seine Auszahlung auf 1 und verbessert die des Gegners auf 4.

Auch hier ergibt sich also durch die Erweiterung des Spiels auf die Quantenmechanik eine Verbesserung der Auszahlung für beide Spieler.

## 6 Warum Quantenspiele?

In drei Beispielen wurde gezeigt, wie einfache Probleme der Spieltheorie durch das Verwenden von Quantenzuständen erweitert werden können. Dabei treten neue Strategien auf, welche die klassischen dominieren können und so auch neue Nash-Gleichgewichte entstehen lassen. Wie wir beim Gefangenendilemma sehen konnten, veränderte der Wechsel zu Quantenstrategien sogar das bisherige Ergebnis, so dass die Dilemma-Situation aufgelöst wird. Dieser Umstand führt zu der Frage, wie und ob Quantenspiele tatsächlich umgesetzt werden können, und auch, ob es dafür eine sinnvolle Anwendung gibt.

Zunächst fällt auf, dass diese Spiele eigentlich keiner Quantenzustände bedürfen: Die Nutzenfunktionen verknüpfen von den Spielern gewählte Parametern zu Wahrscheinlichkeiten, mit denen der jeweilige Spieler eine bestimmte Auszahlung bekommt. Diese Wahrscheinlichkeiten können dann durch Messung von physikalischen Zuständen, z. B. von Elektronen- bzw. Atomspins, ermittelt werden. Man kann sie aber auch ganz einfach durch einen entsprechend gewichteten Würfel „simulieren“ und erhält so das gleiche Ergebnis. Betrachten wir hierzu als Beispiel nochmals das Quanten-Gefangenendilemma: Der Schiedsrichter kann entweder zwei verschränkte „Quantenmünzen“ an die Spieler versenden, diese wieder einsammeln und dann wie oben beschrieben messen, oder er fragt beide Spieler nach ihren  $\theta_j$  und  $\varphi_j$ , setzt diese vier Parameter in die Gleichungen (35a-d) ein und erstellt daraus einen Würfel, der den berechneten Wahrscheinlichkeiten gehorcht. Sowohl die Messung der Quantenmünzen als auch das Würfeln liefern Auszahlungen, deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen sich nicht unterscheiden.

Der Vorteil der Benutzung der Quantenmünzen wird erst dann klar, wenn man von begrenzten Ressourcen ausgeht. In unserem Beispiel des Quanten-Gefangenendilemmas müssen an den Schiedsrichter entweder zwei Quantenmünzen oder vier Parameter übergeben werden. Nimmt man nun an, dass diese Übergabe über einen Kanal (z. B. kostenpflichtige Telefonleitung) abläuft, müssen bei Verwendung der Quantenmünzen nur halb so viele Daten übertragen werden.

Solche Fragestellungen sind ein typisches Beispiel für das Feld der Quanteninformationstheorie. Dieses noch recht junge Teilgebiet der Physik beschäftigt sich mit der Übertragung und Verarbeitung von in Form von Quantenzuständen gespeicherten Informationen. Man erhofft sich durch intensive Forschungen, die bereits entwickelten Konzepte wie das des Quantencomputers oder der Quantenkommunikation technisch umsetzen zu können. In diesem Fall wären dann zahlreiche Situationen denkbar, in denen die oben genannten spieltheoretischen Betrachtungen von entscheidender Bedeutung sind. So lässt sich z. B. das von DAVID MEYER eingeführte und oben besprochene Beispiel als solche Kommunikationssituation verstehen.

Die hier gegebene Einführung in die Quantenspieltheorie ist eine Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse der ersten Veröffentlichungen zu diesem Thema. Mittlerweile gibt es zahlreiche weitere Publikationen, die sich mit den Quanten-Varianten bekannter Spiele (z.B. das Quanten-Ultimatumspiel [VM]) auseinandersetzen oder die oben genannten Beispiele vertiefen und ausweiten (z. B. Quantenspiele mit mehreren Spielern [BH], Gefangenendilemmata mit 3 Parametern [EW], etc.). Es gibt außerdem bereits erste Realisierungen von Quantenspielen mit den derzeitigen Implementierungen von Quantencomputern. So ist beispielsweise das oben beschriebene Quanten-Gefangenendilemma bereits mit verschränkten Photonen gespielt worden [PSWZ].

## Literatur

- [M] D. MEYER: „Quantum Strategies“, PHYSICAL REVIEW LETTERS 82, 1052 (1999)
- [EWL] J. EISERT, M. WILKENS, M. LEWENSTEIN: „Quantum Games and Quantum Strategies“, PHYSICAL REVIEW LETTERS 83, 3077 (1999)
- [EW] J. EISERT, M. WILKENS: „Quantum games“, JOURNAL OF MODERN OPTICS 47 , 2543 (2000)
- [VM] R. VILELA MENDES: „The Quantum Ultimatum Game“, QUANTUM INFORMATION PROCESSING 4, 1 (2005)
- [BH] S. BENJAMIN, P. HAYDEN: „Multiplayer quantum games“, PHYS. REV. A 64, 030301 (2001)
- [PSWZ] R. PREVEDEL, A. STEFANOV, P. WALTHER, A. ZEILINGER: „Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer“, NEW J. PHYS. 9, 205 (2007)