Principal-Agent-Theorie

(optimale Verträge)

(von Christian Groll, Karin Römer und Andreea Stauber)

1. Einführung

Eine einleuchtende Erklärung des Prinzipal-Agenten-Ansatzen, auch Principal-Agent-Theorie genannt, bieten Pratt/Zeckhauser (1985):

> *"Whenever one individual depends on the action of another, an agency relationship arises. The individual taking the action is called the agent. The affected party is the principal."*

D.h., die in der Prinzipal-Agenten-Theorie untersuchten Beziehungen sind durch eine asymmetrische Informationsverteilung zwischen den beteiligten Partnern gekennzeichnet. Der Agent hat dabei gegenüber dem Prinzipal einen Informationsvorsprung. Um Aufgaben nicht selbst zu erledigen, überträgt der Prinzipal Aufgaben und Entscheidungskompetenzen auf den Agenten. Die Handlungen des Agenten beeinflussen daher nicht nur sein eigenes Nutzenniveau, sondern auch das des Prinzipals. Ziel des Ansatzes ist es, durch ein Arragement von richtig gesetzten Anreizen, den Agenten dazu zu bewegen, im Interesse seines Prinzipals zu handeln. Da die Interessen des Prinzipals meist denen des Agenten entgegenstehen, bedarf es gezielter Anreizmechanismen, wie z.B. die performanceorientierte Bezahlung von Managern. In diesem Beispiel sind die Anteilseigner, also die Aktionäre, die Prinzipale, deren Interessen in der Shareholder Value Maximierung liegen. Die Interessen der Agenten, der Manager, die Entscheidungen treffen und eine bessere Informationsbasis besitzen, liegen etwa in der möglichst stressfreien Absolvierung ihrer Aufgaben. Somit könnten sie nicht risikobewusst genug vorgehen bzw. Investitionen mit zu geringer Rendite tätigen, etc. Sind die Manager also nicht ebenso wie die Anteilseigner finanziell beteiligt an etwaigen Sharholder Value Steigerungen, so werden sie dies nicht zu ihrer ersten Priorität erklären, wie das die Anteilseigner aber tun. Daher wird die performanceorientierte Bezahlung in Form von variablen Gehaltsanteilen, die an Umsatz, Ergebnis oder Rendite gebunden sind, eingesetzt, um die Interessen von Managern und Anteilseignern deckungsgleich zu machen. In Folge handeln die Manager so, wie die Anteilseigner selbst gehandelt hätten.

Die Entwicklung eines derartigen anreizeffizienten institutionellen Arrangements, das es dem Prinzipal ermöglicht, den mit einem Informationsvorsprung ausgestatteten Agenten in SEINEM EIGENEN Sinne handeln zu lassen, ist Ziel der Prinzipal-Agenten-Theorie.

Andere klassische Beispiele für Prinzipal-Agenten-Beziehungen sind: Arzt - Patient, neuer Mitarbeiter - einstellendes Unternehmen, Kooperationspartner - Manager der Kooperation, Gründer - Venture Capitalist, Anteilseigner – Wirtschaftsprüfer, allgemein: Dienstleister–Auftraggeber.

Dabei können die Rollen durchaus im Laufe einer Beziehung auch wechseln. Beispiels - weise ist bei einer Wertkettenkooperationen in der Automobilindustrie der Hersteller von der Belieferung mit qualitativ und quantitativ einwandfreien Vorprodukten abhängig. Der Zulieferer ist hingegen auf die zuverlässige Zahlungsbereitschaft der Automobilproduzenten angewiesen.

Es gilt diese Zulieferbeziehung in ein effizientes institutionelles Arrangement einzubetten, innerhalb dessen die beschriebenen Agency-Probleme minimiert werden. Beispiels-weise sind Rückgaberechte, vertragliche Sanktionsmöglichkeiten in Form von Geldstrafen oder Abnahmegarantien denkbar.

Worauf beruhen Agency-Probleme?

Agency – Probleme beruhen zum einen auf der unvollständigen Information der Individuen. Ähnlich der Annahme der beschränkten Rationalität in der Transaktions - kostentheorie verbirgt sich hinter der unvollständigen Information die Unfähigkeit, eine Situation in allen Einzelheiten und Konsequenzen zu erfassen.

Zum anderen liegt die Annahme zugrunde, dass jedes Individuum seinen individuellen Nutzen maximieren möchte, u.U. sogar unter Inkaufnahme der Schädigung Anderer. Anders als in der Transaktionskostentheorie fällt in der Prinzipal – Agent - Theorie eigennütziges oder strategisches Handeln nicht pauschal unter den Begriff des Opportunismus, sondern wird hinsichtlich der ihr zugrunde liegenden Informationsasymmetrie unterschieden.

Drei Arten asymmetrischer Informationsverteilung lassen sich voneinander abgrenzen:

- *hidden characteristics,*
- *hidden action/ hidden information,*
- *hidden intention.*

Zur Überwindung der aus asymmetrischer Informationsverteilung resultierenden Verhaltensunsicherheiten und damit einhergehenden Wohlfahrtsverluste sind institutionelle Arrangements zu schaffen, wie anreizkompatible Verträge, Investition nach Meilensteinen, etc.

Die dabei entstehenden Kosten für die Überwindung von Informationsasymmetrien werden Agency Costs genannt.

Ziel der Principal – Agent - Theorie ist es daher, durch geeignete institutionelle Arrangements bestehende Anreizproblematiken agencykostenminimierend zu lösen.

Die Agency Costs setzen sich dabei zusammen aus Signalisierungskosten des Agenten, Steuerungs- und Kontrollkosten des Prinzipals und einem residualen Wohlfahrtsverlust. Der Wohlfahrtsverlust resultiert daraus, dass Spezialisierungsvorteile nicht optimal genutzt werden.

Alle Aktionen des Agenten nach Vertragsabschluss, die den Interessen des Prinzipals zuwider laufen, werden auch unter dem Begriff Moral- Hazard zusammengefasst.

2. Moral-Hazard

Der Begriff „Moral-Hazard“ stammt ursprünglich aus der Versicherungsindustrie. Er bezeichnet das zusätzliche Schadensrisiko, das der Versicherung entsteht, wenn der Versicherte nach Vertragsabschluss nicht mehr die nötige Sorgfalt aufwendet, um Schaden zu vermeiden.

Der Agent, der im Auftrag des Principals handelt, repräsentiert den informierten Spieler, wo hingegen der Principal der uninformierte Spieler ist. Durch einen bindenden Vertrag wird der Agent vom Principal dazu verpflichtet, bestimmte Aufgaben zu übernehmen. Sobald allerdings, der Vertrag unterschrieben ist, kann der Agent frei entscheiden welchen Einsatz er zur Erfüllung der Aufgaben aufbringt. Somit beeinflussen seine Handlungen sowohl seinen Nutzen als auch den des Principals. Das Principal-Agent-Modell vernachlässigt die Verhandlungsmacht der beiden Akteure, anders ausgedrückt: die Beziehungen zwischen den beiden Akteuren wird als ein sogenanntes Stackelberg-Spiel angesehen. Der Principal (als Stackelberg-Führer) formuliert den Vertrag als ein *Take-it-or-leave-it-Angebot*. Der Agent (als Stackelberg-Folger) hat sodann lediglich die Auswahl, den Vertrag anzunehmen oder abzulehnen.

Das Moral-Hazard-Problem tritt in zwei verschiedenen Formen auf:

- Hidden- Action-Problem
- Hidden-Information-Problem

In beiden Fällen handelt es sich um Spiele mit vollkommener Information. Zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses verfügen beide Spieler über symmetrische Information. Die Informationsasymmetrie ergibt sich im Verlauf der Vertragsbeziehung und bezieht sich auf die Aktion des Agenten.

Im Falle des Hidden-Action-Problems wählt der Agent nach Vertragsabschluss, aber vor Eintreten der Exogenen Störgrößen eine Aktion aus. Diese Aktion kann der Principal nicht oder nur unter Aufwendung von Kosten beobachten. Der Principal ist auch nicht in der Lage, aus dem beobachteten Ergebnis der Auftragsdurchführung auf die Aktion des

Agenten zu schließen. Denn dieses Ergebnis wird nicht nur durch die Aktionsauswahl des Agenten, sondern auch durch eine exogene Störgroße verursacht, und der Prinzipal vermag die Ergebnisbeiträge von Aktion und exogener Störgroße nicht voneinander zu isolieren. Daher wird der Beitrag, den der Agent durch seine Aktion leistet, aus der Perspektive des Prinzipals durch den Einfluss der exogenen Störgroße in analytisch nicht auflösbarer Weise verzerrt.

Eine alternative Formulierung sieht vor, dass der Principal zwar die Handlungen des Agenten beobachten, aber sie nicht gegenüber Dritten, z.B. dem Gericht, verifizieren kann.

Beispiel aus der Versicherungsindustrie:

Schließt ein Kunde eine Versichrung für sein Auto ab, so wird er nach Vertragsabschluss er im Straßenverkehr nicht notwendigerweise dieselbe Sorgfalt aufbringen wie vorher. Ob er jedoch tatsächlich fahrlässig gehandelt hat ist im Schadensfall nur schwer und unter hohen Aufwand beweisbar.

Das Problem der Hidden-Information liegt vor, wenn der Agent Informationen über den Zustand der Welt erhält, die seine Handlungen beeinflussen können, der Principal aber nicht.

Das Beispiel von Milgrom und Roberts zeigt wie ähnlich sich die beiden Fälle sind. Eine Studie in den USA stellte fest, dass der Anteil an Volvo-Fahrern, die im Sommer 1990 in Washington D.C. dabei ertappt wurden, nicht vorschriftsgemäß an Stopp-Schildern zu halten, größer ist als der Anteil an Fahrern aller anderen Automarken. Das könnte man auf zwei unterschiedliche Arten erklären. Es könnte ein Hidden-Action Problem vorliegen. Nachdem eine Person einen Volvo gekauft hat und weiß, dass diese ein sehr sicheres Modell ist, besteht keine Notwendigkeit mehr, besonders vorsichtig im Straßenverkehr zu agieren. Es könnte aber auch ein Hidden-Information Problem vorliegen. In diesem Fall werden genau solche Fahrer, die wissen dass sie eher unsicher oder unkonzentriert fahren, ein sicheres Auto kaufen, einen Volvo. Damit wollen sie ihre mangelnden Fahrfähigkeiten kompensieren.

2.1 Der optimale Vertrag unter asymmetrischer Information

Das Moral-Hazard-Problem kann unter asymmetrischer Information auftreten, wenn eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

- Verhalten des Agenten ist von Principal nicht beobachtbar
- Verhalten des Agenten ist beobachtbar, aber nicht gegenüber Dritten verifizierbar.

Die zweite Bedingung führt dazu, dass das Anstrengungsniveau *e* nicht in den Vertrag aufgenommen werden kann. Selbst wenn er als fester Wert in den Vertrag aufgenommen wird, kann ein Gericht ex post nicht feststellen, ob der Vertrag gehalten oder gebrochen wurde.

Zeitliche Abfolge des Spiels zwischen Principal und Agent lautet:

1. Principal schlägt dem Agenten einen Vertrag vor
2. Agent nimmt Vertrag entweder an oder lehnt ihn ab
3. Nimmt er ihn an so wird er daraufhin sein optimales Anstrengungsniveau wählen.
4. Entsprechend der Anstrengung des Agenten wird der Output realisiert. Der Principal kann das erreichte Outputniveau beobachten und zahlt den vereinbarten Lohn an den Agenten.

Kann nun aus den oben genannten Gründen das Anstrengungsniveau e nicht in den Vertrag aufgenommen werden, ergibt sich das folgende Problem. Der Principal ist risikoneutral, der Agent risikoavers. Ist e beobachtbar, so wird der optimal Vertag so konzipiert sein, dass der Principal dem Agenten einen konstanten Lohn zahlt. Der Principal bietet ihm somit eine vollkommene Versicherung gegen Outputrisiken an. Ist e nicht beobachtbar, so wird der Agent nach Vertragsabschluss sein optimales Anstrengungsniveau wählen. Da e seinen Nutzen negativ beeinflusst, wird er das kleinst mögliche Anstrengungsniveau wählen. Der Principal wird also in diesem Fall die Überlegungen des Agenten bei Erstellung des Vertrages berücksichtigen und ihm somit den geringstmöglichen Lohn zahlen, den der Agent gerade noch bereit ist zu akzeptieren.

<u>Bedingungen eines optimalen Vertrages unter Moral-Hazard</u>

Formal lässt sich der optimale Vertrag herleiten als perfektes Bayasianisches Gleichgewicht in den oben dargestellten Spiel zwischen Principal und Agent.

Das Lösungsverfahren folgt der Rückwärtsinduktion. Auf der letzten Stufe des Spiels entscheidet der Agent über sein Anstrengungsniveau e. Da er seinen Nutzen maximieren will, wird er e so wählen, dass sein Nutzen optimiert wird, also

$$e \in \quad \arg max_{\hat{e}}\{\sum_{i=1}^{n} p_i(\hat{e})u\big(w(q_i)\big) - v(\hat{e})\}$$

Diese Bedingung bezeichnet man als <u>Anreizkompatibilitätsbedingung</u>. Man sieht in dieser Bedingung nun deutlich das eigentliche Moral-Hazard Problem unter asymmetrischer Information. Sobald der Agent den Vertrag unterzeichnet, wird er e unabhängig von den vertraglichen Regelungen so wählen, dass dieser ihm den höchsten Nutzen bringt. Auf der vorletzten Stufe entscheidet sich der Agent, ob er den Vertag annehmen oder ablehnen soll. Er wird ihn nur dann annehmen, falls der Nutzen aus dem Vertag mindestens so hoch ist wie sein Reservationsnutzen $\overline{U}$. Der Reservationsnutzen ist der Nutzen, den er auch ohne den Vertrag erreichen kann (z.B. Arbeitslosengeld).

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e)u(w(q_i)) - v(e) \geq \overline{U}$$

Diese Bedingung wird als Partitipationsbedingung bezeichnet.

Auf der ersten Spielstufe muss der Principal den Vertrag formulieren. Unter vollkommener Rationalität wird er die gerade dargestellten Überlegungen des Agenten bei der Gestaltung des Vertrages berücksichtigen. Der nun von ihm vorgeschlagene Vertag stellt die Lösung des folgenden Problems dar:

$$max_{[e,\{w(q_i)\}i=1,..,n]} \sum_{i=1}^{n} p_i(e)B\big(q_i - w(q_i)\big)$$

Unter der Nebenbedingung der Partitipation:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e)(w(q_i)) - v(e) \geq \overline{U}$$

Und der Anreizkompatibilitätsbedingung:

$$e \in \arg max_{\hat{e}}\{\sum_{i=1}^{n} p_i(\hat{e})\big(w(q_i)\big) - v(\hat{e})\}$$

Der Principal versucht also den Vertag so zu formulieren, dass sein Nutzen maximiert wird, unter Berücksichtigung das der ihm nutzenstiftende Output von seinem Agenten produziert wird, der seinen Nutzen auch maximieren will.

2.2 Anwendungsbeispiele

2.2.1 Broadway-Spiel

Beschreibung:

Ein risikoneutraler Investor (Principal) bietet einem risikoaversen Broadway-Produzenten (Agent) die Finanzierung eines Showprojektes an. Er ist bereit ihm eine Finanzierung von w(q) zu Verfügung zu stellen. q ist dabei der Output aus der Show. Nach Erhalt der Finanzierung kann der Produzent sich entscheiden ob er die Gelder sinnvoll einsetzt oder veruntreut. Ist die Show ein Erfolg, so fährt er ein Ergebnis von q=500 ein, wenn er die Gelder nicht veruntreut. Hat er die Gelder jedoch veruntreut beträgt das Ergebnis einer erfolgreichen Show q=100. Ist die Show ein Flop so ist ihr Ergebnis q=-100, unabhängig davon, ob der Produzent die Gelder veruntreut hat oder nicht. Wieder haben wir einen informierten Agenten (Produzent) und einen uninformierten Principal (Investor).

Spielablauf:

1. Der Investor macht einen Finanzierungsvorschlag w(q) als Funktion des beobachtbaren Ergebnisses q.
2. Der Produzent kann den Vertrag entweder annehmen oder ablehnen.
3. Nimmt er den Vertrag an, wählt er anschließend, ob er die Finanzierungsmittel die ihm zu Verfügung gestellt wurden veruntreut oder nicht.
4. Das Ergebnis der Show wird realisiert. Mit 50% Wahrscheinlichkeit sei die Show ein Erfolg.

Für die Nutzenfunktionen der beiden Spieler soll gelten: Lehnt der Produzent den Vertag ab, so erzielt er einen Reservationsnutzen von U(+100), der Payoff der Investors ist in diesem Fall π_I= 0. Nimmt der Produzent den Vertrag an, gilt:

$$U_P = \begin{cases} U(w(q)+50) & \text{bei veruntreuen} \\ U\big(w(q)\big) & \text{bei nicht veruntreuen} \end{cases}$$

Der Payoff des Investors beträgt in diesem Fall:

$$\pi_I = q - w(q)$$

Das Spiel führt zur folgenden Auszahlungsmatrix:

Umweltzustand / Aktion	Flop	Erfolg
Veruntreuen	-100	+100
Nicht veruntreuen	-100	+500

Wir haben ein Nash-Gleichgewicht bei (Erfolg, nicht veruntreuen). Der Produzent hat also hier den größten Nutzen.

Die Wahrscheinlichkeiten in Verbindung mit den jeweiligen Aktionen lauten:

Ergebnis / Aktion	-100	+100	+500	Gesamt
Veruntreuen	0,5	0,5	0	1
Nicht veruntreuen	0,5	0	0,5	1

Entscheidet sich der Produzent für die Aktion „nicht veruntreuen", so erzielt er einen Nutzen von:

$$U_P(nicht\ veruntreuen) = 0{,}5U\big(w(-100)\big) + 0{,}5U(w(+500))$$

während ihm nach der Wahl von „veruntreuen" ein Nutzen von:

$$\pi_I(veruntreuen) = 0{,}5U(w(-100) + 50) + 0{,}5U(w(+100) + 50)$$

entsteht.

Die Nebenbedingungen für den effizienten Vertrag, der das Anstrengungsniveau „nicht veruntreuen" implementieren soll lauten:

Partitipationsbedingung:

$$U_P(nicht\ veruntreuen) = 0{,}5U\big(w(-100)\big) + 0{,}5U\big(w(+500)\big) \geq \overline{U_P} = U(100)$$

Anreizkompatibilitätsbedingung:

$$U_p(nicht\ veruntreuen) \geq U_P(veruntreuen)$$

$$0{,}5U\big(w(-100)\big) + 0{,}5U\big(w(+500)\big) \geq 0{,}5U(w(-100) + 50) + 0{,}5U(w(+100) + 50)$$

Bei der Herleitung des optimalen Vertrags fällt in diesem Spiel auf, dass Ergebnisse q existieren, die nur in Verbindung mit einem bestimmten Anstrengungsniveau realisiert werden können. Dieses Spiel wird nur im Falle des Veruntreuens der Gelder ein Ergebnis von q = 100 bringen, während eine Beobachtung von q = 500 direkt auf die Aktion „nicht veruntreut" schließen lässt. Nur im Falle des Ergebnisses von q = -100 kann der Investor nicht darauf schließen, ob der Produzent ihn hintergangen hat oder nicht. Es gilt also nicht, dass ein Anstieg im Output von -100 auf +100 ein Zeichen für ein höheres Anstrengungsniveau ist, d.h. für die Wahl von „nicht veruntreuen“ statt „veruntreuen“ ist. Daraus folgt, dass sich ein Vertrag in folgender Form anbietet:

w(+500) = 100

w(-100) = 100

w(+100) = -∞

Dieser Vertrag erfüllt die Partizipationsbedingung bindend ist somit für den Investor der günstigste mögliche Vertrag. Unter der Annahme, dass der Agent risikoavers ist, erfüllt er auch die Anzeizkompatibilitätsbedingung. Gleichzeitig bietet er dem Produzenten eine vollständige Versicherung, die dem Investor, da er risikoneutral ist, nicht weiter kostet. Er trägt das gesamte Risiko, stellt aber durch die extreme Bestrafung des Produzenten im Falle einer Abweichung von der gewünschten Aktion sicher, dass der Produzent die Gelder nicht veruntreut.

Ein solcher Vertrag wird als „Boiling-in-oil“-Vertrag bezeichnet. Ein solcher Vertag kann nur unter bestimmten Voraussetzungen eingesetzt werden. Bei der unerwünschten Aktion müssen Ergebnisse mit hoher Wahrscheinlichkeit beobachtet werden, die unter dem optimalen Arbeitseinsatz nicht oder nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit realisiert werden können. Es muss auch die Möglichkeit bestehen, den Agenten bestrafen zu können, was aufgrund von Regelungen zur begrenzten Haftung nicht immer möglich ist. Ein solcher Vertrag ist meist nur als Abschreckung gedacht. Er soll nicht tatsächlich die Strafe ausführen. Eine ausreichend starke Drohung reicht meist aus um das Moral-Hazard-Problem zu beseitigen.

2.2.2 ***Productiongame 1***: First-best-Vertrag unter Informationssymmetrie

Das sogenannte „Productiongame“ betrachtet die Vertragsschließung zwischen einem Arbeitnehmer oder Manager, der im Auftrag eines Arbeitgebers (dem Firmenbesitzer) Output produzieren soll. Der Arbeitnehmer habe eine Nutzenfunktion $U = \sqrt{w} - e$ mit zwei möglichen Anstrengungsniveaus $e \in \{0,1\}$. Sein Reservationsnutzen betrage $\overline{U} = 3$. Es können zwei verschiedene Outputniveaus realisiert werden, $q \in \{0,100\}$. Die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Outputlevels in Abhängigkeit vom Arbeitseinsatz e, $p(q = q_i|e)$, sei dabei:

Effort/Output	q=0	q=100
$e_L = 0$	0,3	0,7
$e_H = 1$	0,1	0,9

Die Nutzenfunktion des Principal laute dabei $B = q - w$. Nach Vertragsabschluss kann der Principal die Wahl des Agenten bezüglich e beobachten.

Fragestellungen:

(a) Wie hoch wären Arbeitseinsatz und Nutzen des Agent, wenn er anstelle des Principal Eigentümer der Firma wäre?

(b) Wie sieht der optimale Vertrag unter vollständiger Information aus, wenn mehrere Firmenbesitzer um den Arbeitnehmer konkurrieren? Wie hoch ist der Nutzen des Agent?

(c) Wie lautet derselbe Vertrag, wenn mehrere Arbeitnehmer um den Auftrag eines Firmenchefs konkurrieren? Wie hoch sind nun die Nutzen?

Antworten:

(a) Besitzt der Agent die Firma, so erwirtschaftet er den Output zu seinem eigenen Gewinn, d.h. es gilt: $w(q) = q$. Sein Nutzen in Abhängigkeit von dem gewählten Anstrengungsniveau ergibt sich somit zu:

$$U(e_L) = 0{,}3 \cdot \sqrt{0} + 0{,}7 \cdot \sqrt{100} - 0 = 7$$

oder

$$U(e_H) = 0{,}1 \cdot \sqrt{0} + 0{,}9 \cdot \sqrt{100} - 1 = 8.$$

Der Agent maximiert seinen Nutzen, wenn er das hohe Anstrengungsniveau $e_H = 1$ wählt und damit einen Nutzen von 8 erzielt.

(b) Unter vollständiger (d.h. symmetrischer) Information, dass der Vertrag auf das gewünschte Anstrengungsniveau konditioniert werden kann, d.h. $w = w(e)$. Somit muss die Anreizkompatibilität des Vertrages nicht berücksichtigt werden, da e direkt im Vertrag festgeschrieben und überwacht werden kann. Der optimale Vertrag muss lediglich den Nutzen des Principal maximieren und vom Agent akzeptiert werden.
Konkurrieren mehrere Principals um einen Agent, so liegt die Verhandlungsmacht faktisch beim Agent. Er kann sich aussuchen, welchen der angebotenen Verträge er akzeptiert. Er wird genau den Vertrag auswählen, der ihm den höchsten Nutzen erbringt. Dies impliziert, dass nicht der Agent auf sein Reservationsnutzenniveau gedrängt wird, sondern hier der Principal, dessen Vertrag er annimmt. Die Partizipationsbedingung lautet faktisch also:

$$B(w,q) = 0$$

$$q(e) - w(e) = 0$$

$$w(e) = q(e)$$

mit $\bar{B} = 0$.

Um den hohen Arbeitseinsatz e_H zu implementieren, muss der Principal einen Vertrag vorschlagen, für den gilt:

$$w(e_H) = E\big(q(e_H)\big) = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}9 \cdot 100 = 90.$$

Da der Vertrag unter symmetrischer Information das gewünschte Anstrengungsniveau einklagbar festsetzt, muss für alle anderen möglichen Anstrengungsniveaus kein Lohn festgelegt werden.

Aus dem genannten Vertrag folgt für den Agent ein Nutzenniveau von: $U(e_H) = \sqrt{90} - 1$, während der Principal einen Nutzen von $V = E(q - w) = E(q) - w = 90 - 90 = 0$ erzielen kann.

(c) Die Verhandlungsmacht liegt nun wieder beim Principal. Der optimale Vertrag muss daher die Partizipation eines Agent sicherstellen, d.h. es muss für das gewünschte Anstrengungsniveau gelten:

$$\begin{gathered} E[U(e_H)] = \overline{U} \\ \sqrt{w(e_H)} - e_H = 3 \\ \sqrt{w(e_H)} - 1 = 3 \\ w(e_H) = 16 \end{gathered}$$

Der optimale Vertrag lautet also $w(e_H) = 16$. Dabei erreicht der Principal einen Nutzen von $V(e_H) = q - w = 90 - 16 = 74$ und der Agent gerade seinen Reservationsnutzen $U(e_H) = \overline{U} = 3$.

2.2.3 ***<u>Productiongame 2</u>***: Second-best-Vertrag unter Informationsasymmetrie

Die Nutzenfunktion eines Managers betrage $U = \sqrt{w} - e$. Im Rahmen eines Produktionsprozesses kann er entweder einen hohen Arbeitseinsatz $e_H = 6$ oder einen niedrigen Arbeitseinsatz $e_L = 0$ wählen. Sein Reservationsnutzen betrage $\overline{U}=6$. Die Wahrscheinlichkeit der Produktionsoutputs q in Abhängigkeit vom Arbeitseinsatz des Managers, $p(q = q_i|e)$, sei gegeben mit:

Effort / Output	q_L	q_H
e_L	0,8	0,2
e_H	0,2	0,8

Für den Eigentümer der Firma (Principal) sei die Wahl des Arbeitseinsatzes e nicht beobachtbar. Sein Nutzen betrage $B = q - w$.

Fragestellungen

(a) Welchen Fixlohn muss der Eigentümer zahlen, damit der Manager überhaupt arbeitet?
(b) Wie lauten allgemein die Partizipations- und Anreizbedingungen für einen Vertrag, der auf den hohen Arbeitseinsatz abzielt?
(c) Wie lautet der Vertrag, der versucht, den hohen Arbeitseinsatz zu implementieren?
(d) Ist ein solcher Vertrag überhaupt „optimal“?

Antworten

(a) Wen das Anstrengungsniveau e nicht beobachtbar ist und ein Fixlohn gezahlt wird, so hat der Agent keinerlei Arbeitsanreiz. Er wählt somit immer das Anstrengungsniveau, das ihm die geringste Nutzeneinbuße erbringt, d.h. $e_L = 0$.
Selbst unter asymmetrischer Information muss der Fixlohn-Vertrag somit nur die Partizipation des Agenten sicherstellen. Der Principal wird antizipieren, dass der Agent nur das niedrige Anstrengungsniveau e_L realisieren wird. Die entsprechende Partizipationsbedingung lautet somit:

$$E[U(e_L)] = \bar{U}$$
$$\sqrt{w} - 0 = 6$$
$$w = 36.$$

(b) Soll der Vertrag das hohe Anstrengungsniveau e_H implementieren, so ergibt sich die Partizipationsbedingung für den Agenten zu:

$$E[U(e_H)] \geq \bar{U}$$
$$0{,}2 \cdot \sqrt{w(q_L)} + 0{,}8\sqrt{w(q_H)} - 6 \geq 6$$
$$0{,}2 \cdot \sqrt{w(q_L)} + 0{,}8\sqrt{w(q_H)} \geq 12$$

und die Anreizkompatibilitäts-Bedingung zu:

$$E[U(e_H)] \geq E[U(e_L)]$$
$$0{,}2\sqrt{w(q_L)} + 0{,}8\sqrt{w(q_H)} - 6 \geq 0{,}8\sqrt{w(q_L)} + 0{,}2\sqrt{w(q_H)} - 0$$
$$0{,}6\sqrt{w(q_H)} - 6 \geq 0{,}6\sqrt{w(q_L)}$$
$$\sqrt{w(q_H)} \geq 10 + \sqrt{w(q_L)}.$$

(c) Aus den oben dargestellten (bindenden) Nebenbedingungen für den optimalen Vertrag, der e_H implementieren soll, folgt:

$$0{,}2\sqrt{w(q_L)} + 0{,}8\left(10 + \sqrt{w(q_L)}\right) = 12$$
$$\sqrt{w(q_L)} = 4$$
$$w(q_L) = 16$$

und

$$\sqrt{w(q_H)} = 10 + \sqrt{16} = 14$$
$$w(q_H) = 196.$$

Der optimale Vertrag sieht somit vor, dass nach Beobachtung des hohen Outputs von $q_H = 300$ ein Lohn von $w(q_H) = 196$ gezahlt wird, nach beobachtung des niedrigeren Outputs $q_L = 100$ dagegen nur ein Lohn von $w(q_L) = 16$.

(d) Der Agent wird infolge des optimalen Vertrages maximal sein Reservationsnutzenniveau von$\overline{U} = 6$ erreichen. Die Frage nach der Effizienz des Vertrages hängt somit davon ab, welches Nutzenniveau der Principal erreichen kann, wenn entweder e_H oder e_L durch den Vertrag angestrebt wird. Da der Vertrag zur Implementierung von e_L dem Fixlohn aus der ersten Teilaufgabe entspricht, ergibt sich für den Principal hier ein Nutzen von:

$$\begin{aligned} B(e_L) &= E(G) - w \\ &= 0{,}8 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 300 - 36 \\ &= 104. \end{aligned}$$

Im Falle des ermittelten Vertrages, der $e_H = 6$ implementieren soll, erreicht der Principal ein Nutzenniveau von:

$$\begin{aligned} B(e_H) &= E(G - w) \\ &= 0{,}2 \cdot (100 - 16) + 0{,}8(300 - 196) \\ &= 100. \end{aligned}$$

Der Fixlohn-Vertrag, der den Manager zur Wahl des niedrigen Anstrengungsniveaus e_L veranlasst, ist somit tatsächlich second-best-effizient für den Principal. Unter asymmetrischer Information maximiert der Principal hier seinen Nutzen, indem er nur einen Fixlohn zahlt, statt den Agenten durch einen monotonen Vertrag zur Wahl eines höheren Anstrengungslevels e_H zu animieren. Ursache dafür ist, dass die entsprechenden Anreize für den Principal zu teuer sind im Vergleich zum Fixlohn-Vertrag.

2.2.4 ***<u>Productiongame 3</u>***: Optimaler Vertrag unter symmetrischer und asymmetrischer Infomation

Ein Firmenbesitzer (Principal) sei risikoneutral mit einer Nutzenfunktion von $B = q - w$, der Manager (Agent) dagegen risikoavers mit einer Nutzenfunktion von $U = \sqrt{w} - e^2$, wobei q den produzierten Output, w den Lohn und e den Anstrengungsniveau des Agent darstellt. Der Agent kann zwischen niedriger Anstrengung $e_L = 0$ und hoher Anstrengung $e_H = 3$ wählen. Sein Reservationsnutzen betrage $\overline{U} = 21$. Die Produktionstechnologie kann zu drei unterschiedlichen Ergebnissen führen: $q_0 = 0, q_1 = 1000$ oder $q_2 = 2500$, die mit folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(q = q_i|e)$ realisiert werden:

Effort/Output	$q_0 = 0$	$q_1 = 1000$	$q_2 = 2500$
$e_L = 0$	0,4	0,4	0,2
$e_H = 3$	0,2	0,4	0,4

Fragestellungen

(a) Wie lauten die optimalen Verträge unter symmetrischer Information, d.h. wenn der Firmenbesitzer das gewählte Anstrengungsniveau des Managers beobachten kann? Welches Anstrengungsniveau wird der Principal vom Agent verlangen?

(b) Wie ergibt sich der optimale Vertrag unter asymmetrischer Information (d.h. wenn nur der Output q für den Principal beobachtbar ist), der das niedrige Anstrengungsniveau e_L implementiert?

(c) Welche Kennzeichen besitzt das Optimierungsproblem unter asymmetrischer Information für den Principal, wenn er den Agenten zu einer Anstrengung von e_H bewegen möchte?

(d) Wie lautet der entsprechende optimale Vertrag? Welchen Vertrag wird der Principal unter asymmetrischer Information dem Agent dann anbieten?

Antworten

(a) Liegt eine symmetrische Informationsverteilung zwischen Principal und Agent vor, so kann e im Vertrag festgeschrieben werden. Der Lohn ist dann eine Funktion des Anstrengungsniveaus, d.h. $w = w(e)$. Der optimale Vertrag muss dann nur die Partizipationsbedingung des Agenten erfüllen.

Soll der Vertrag das niedrige Anstrengungsniveau $e_L = 0$ implementieren, so ermittelt man unter Beachtung der (bindenden) Partizipationsbedingung des Agenten:

$$E(U) = \overline{U}$$
$$\sqrt{w(e_L)} - e_L^2 = 21$$
$$\sqrt{w(e_L)} = 21$$
$$w(e_L) = 144.$$

Der erwartete Nutzen des Principal ergibt sich damit zu $E(B|e_L) = E(q|e_L) - w(e_L) = 0{,}4 \cdot 1000 + 0{,}2 \cdot 2500 - 441 = 4500 - 441 = 4059.$ Soll der Vertrag dagegen das hohe Anstrengungslevel $e_H = 3$ implementieren, so berechnet sich der optimale Lohn zu:

$$E(U) = \overline{U}$$
$$\sqrt{w(e_H)} - 3^2 = 21$$
$$\sqrt{w(e_H)} = 21 + 9$$
$$w(e_H) = 900,$$

wobei der erwartete Nutzen des Principal einen Wert von $E(B|e_H) = 0{,}4 \cdot 1000 + 0{,}4 \cdot 2500 - 900 = 4100$ annimmt. Der Principal maximiert offensichtlich seinen Nutzen, wenn er das hohe Anstrengungsniveau e_H vom Agenten verlangt.

(b) Sofern der Vertrag keine konkreten Anreize gibt, ein höheres als das minimale Anstrengungsniveau zu wählen, wird der Agent immer das niedrige Niveau $e_L = 0$ realisieren, da dies seinen Nutzen maximiert bzw. sein Arbeitsleid minimiert. Der Principal kann dies auf kostengünstige Weise erreichen, indem er einen Fixlohn-Vertrag vorschlägt, der gerade die Partizipationsbedingung des Agent bindend erfüllt. Wie bereits in der ersten Teilaufgabe ermittelt, sieht dieser Vertrag vor, dem Agent unabhängig vom beobachteten Output einen fixen Lohn von $w = 441$ zu zahlen.

(c) Bei einem Optimierungsproblem unter asymmetrischer Information muss sowohl die Partizipations- als auch die Anreizkompatibilitätsbedingung des Agents erfüllt werden. Wenn das hohe Anstrengungsniveau e_H implementiert werden soll, lautet die Optimierungsaufgabe des Principal daher:

$$\max_{w_0, w_1, w_2} [-0{,}2 \cdot w_0 + 0{,}4(1000 - w_1) + 0{,}4(2500 - w_2)],$$

unter den Nebenbedingungen der Partizipation:

$$0{,}2\sqrt{w_0} + 0{,}4\sqrt{w_1} + 0{,}4\sqrt{w_2} - e_H^2 \geq 21$$

und der Anreizkompatibilität:

$$0{,}2\sqrt{w_0} + 0{,}4\sqrt{w_1} + 0{,}4\sqrt{w_2} - e_H^2 \geq 0{,}4\sqrt{w_0} + 0{,}4\sqrt{w_1} + 0{,}4\sqrt{w_2} - e_L^2.$$

(d) Auf Basis des Optimierungskalküls der vorangegangenen Teilaufgabe ermittelt sich der optimale Vertrag nun wie folgt. Zunächst kann man aus der Anreizkompatibilitätsbedingung ermitteln, dass:

$$0{,}2\sqrt{w_0} + 0{,}4\sqrt{w_1} + 0{,}4\sqrt{w_2} - 9 = 0{,}4\sqrt{w_0} + 0{,}4\sqrt{w_1} + 0{,}4\sqrt{w_2}$$

$$\sqrt{w_0} = \sqrt{w_2} - 45$$

$$w_0 = (\sqrt{w_2} - 45)^2.$$

Aus der Partizipationsbedingung folgt:

$$0{,}2\sqrt{w_0} + 0{,}4\sqrt{w_1} + 0{,}4\sqrt{w_2} - 9 = 21$$

$$0{,}2\left(\sqrt{w_2} - 45\right) + 0{,}4\sqrt{w_1} + 0{,}4\sqrt{w_2} = 21$$

$$0{,}6\sqrt{w_2} - 18 + 0{,}4\sqrt{w_1} = 21$$

$$\sqrt{w_1} = 97{,}5 - 1{,}5\sqrt{w_2}$$

$$w_1 = (97{,}5 - 1{,}5\sqrt{w_2})^2.$$

Setzt man die beiden so ermittelten Ausdrücke für w_0 und w_1 in das Optimierungsproblem des Principal ein, so ergibt sich:

$$E(B|e_H) = 1400 - 0{,}2(\sqrt{w_2} - 45)^2 - 0{,}4(97{,}5 - 1{,}5\sqrt{w_2})^2 - 0{,}4w_2$$

$$= -2807{,}5 - 1{,}5w_2 + 135\sqrt{w_2}.$$

Schließlich verbleibt noch, die so vereinfachte erwartete Nutzenfunktion des Principal nach w_2 abzuleiten und gleich Null zu setzen:

$$\frac{\partial E(B|e_H)}{\partial w_2} = -1{,}5 + \frac{135}{2\sqrt{w_2}} = 0$$

$$\sqrt{w_2} = \frac{135}{1{,}5 \cdot 2}$$

$$w_2 = 45^2 = 2025.$$

Mit diesem Wert für w_2 ergibt sich sodann $w_0 = 0$ und $w_1 = 900$.

Der erwartete Nutzen des Principal aus diesem Vertrag lautet $E(B|e_H) = 1400 - 0{,}2 \cdot 0 - 0{,}4 \cdot 900 - 0{,}4 \cdot 2025 = 230$. Da dieser Nutzen geringer ist als der aus dem Fixlohn-Vertrag in der zweiten Teilaufgabe, wird der Principal ein Anstrengungsniveau von $e_L = 0$ des Agent bevorzugen und ihm einen Fixlohn von $w = 441$ anbieten. Ursache dafür sind wiederum die extrem hohen Kosten eines geeigneten Anreizsystems, um den Agent zur Wahl des hohen Anstrengungsniveaus e_H zu veranlassen.

3. Adverse Selection

Genau wie Moral Hazard, hat auch das Problem der Adverse Selection seinen Ursprung in einer asymmetrischen Informationsverteilung der einzelnen Spieler. Auch hier stehen sich besser informierte Spieler (Agent) und schlechter informierte Spieler (Principal) gegenüber. Im Gegensatz zum Moral Hazard Problem, bei dem der Informationsnachteil des Principal daher rührt, dass er die exakte Handlungsweise des Agent nicht wahrnehmen kann, liegt der Nachteil des Principal beim Adverse Selection Problem darin, dass er die genauen Charakteristika oder Eigenschaften des Agent nicht feststellen kann. So ist bspw. einem Versicherungsunternehmen die genaue Risikogruppe eines zu Versichernden, einem Autokäufer die genaue Qualität des Gebrauchtwagens oder einem Kreditgeber die Zahlungsfähigkeit des Kreditnehmers unbekannt. Das Unwissen des Principal über die genaue Beschaffenheit des Agent macht das Spiel somit zu einem Spiel mit unvollständiger Information, in dem der Agent über private, dem Principal unzugängliche Informationen verfügt.

Um dem Problem der Adverse Selection Herr zu werden, gibt es, neben dem Aspekt der Reputation bei wiederholten Spielen, beim einmalig durchgeführten Spiel im Allgemeinen zwei unterschiedliche Ansätze, die die Festlegung von Verträgen dahingehend beeinflussen, dass sie dem Principal ermöglichen, die unterschiedlichen Arten von Agents unterscheiden zu können. So kann die Initiative für eine Anpassung der unterschiedlichen Informationsniveaus vom Agent ausgehen, der durch die Übermittlung eines Signals (Selbstbeteiligungsklausel bei Versicherungen, Garantieerklärung bei Gebrauchtwägen, etc.) versucht, dem Principal über seine - dem Principal bis dato unbekannte - Charakteristik bzw. seinen Typus Aufschluss zu verschaffen. Dieser Ansatz wird im Allgemeinen als ”Signaling“ bezeichnet.

Ein zweiter Ansatz, um Informationsasymmetrien abzubauen, ergibt sich aus dem sogenannten „Screening“. Hierbei ist es der uninformierte Principal, der in einem ersten Schritt versucht, durch das Anbieten von verschiedenen und auf die unterschiedlichen

Agents zugeschnittenen Verträgen, eine Selbstunterscheidung der Agents nach ihren unterschiedlichen Charakteristika zu bewirken.

Die Untergliederung des Abschnitts über Adverse Selection folgt nun folgendem Aufbau: im ersten Unterabschnitt wird der Nutzen des Signaling untersucht. Hierbei wird in einem ersten Schritt die allgemeine Theorie zu Spielen in extensiver Form mit unvollkommener Information eingeführt.

Dazu muss das Konzept des teilspielperfekten Nash-Gleichgewichts auf ein neues Gleichgewichtskonzept erweitert werden: das Perfekte Bayes-Gleichgewicht. Im Folgenden wird dann der Nutzen von Signaling anhand eines praxisorientierten Beispiels verdeutlicht: das Beispiel untersucht die Signalwirkung eines hohen Bildungsniveaus bei der Bewerbung auf einen Arbeitsplatz.

Anschließend wird im Unterabschnitt über Screening aufgezeigt, wie der Principal durch das Angebot von verschiedenen, auf die unterschiedlichen Charaktertypen der Agents zugeschnittenen, Verträgen das Problem der Adverse Selection umgehen kann. Auch dies wird wiederum anhand zweier praxisbezogener Beispiele genauer erläutert.

3.1 Signaling:

Eine wichtige Vereinfachung bei der Analyse von Signaling-Spielen ist der Umstand, dass Spiele mit unvollständiger Information in Spiele mit unvollkommener Information transformiert werden können. Hierbei erhält man das transformierte Spiel, indem man das ursprüngliche Spiel um einen Spieler ”Natur“ erweitert, der zu Beginn des Spiels anhand einer festgelegten Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Charakteristik des Agent entscheidet. Das Problem wandelt sich also zu einem Spiel extensiver Form, bei dem der Principal nicht zwischen allen unterschiedlichen Knoten differenzieren kann. Seine Informationsbezirke sind nun also nicht mehr einelementig. Dieser Umstand bewirkt nun jedoch, dass das Prinzip des teilspielperfekten Gleichgewichts nicht mehr anwendbar ist. Dadurch, dass sich der Principal im Unklaren darüber ist, an welchem Knoten er sich genau befindet, das heißt, mit welchem Teilspiel er sich bei seiner Handlungswahl überhaupt konfrontiert sieht, kann eine Aussage über seine optimale Handlungsstrategie nicht mehr ohne weiteres anhand von teilspielperfekten Handlungen getroffen werden. Deshalb erfordert die Analyse von Spielen mit Adverse Selection auch ein neues Konzept für Gleichgewichte. Eine mögliche Erweiterung für Gleichgewichte bei Spielen mit unvollkommener Information ist das Prinzip des Perfekten Bayes-Gleichgewichts. Dieses Prinzip verknüpft das Konzept des teilspielperfekten Gleichgewichts mit der Regel von Bayes, sodass der Principal anhand der Handlung des Agents seine a priori Wahrscheinlichkeitsverteilung über die unterschiedlichen Agents anpasst, und versucht, seine Handlungen bezüglich der a posteriori Verteilung zu optimieren.

Der entscheidende Punkt beim Signaling ist, dass Spieler anhand ihrer Handlungsentscheidungen Informationen übermitteln können. Somit können die a priori Wahrscheinlichkeiten anhand von Bayes Rule an die neuen Gegebenheiten angepasst werden.

Theorem 1.1 (Bayes Rule)
Seien A und B Ereignisse. Es gelte $\mathbb{P}(B) > 0$. *Dann gilt:*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A|B)*\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Bayes Rule beschreibt also, wie der Principal seine Annahme über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der verschiedenen Charaktertypen der Agents anpasst, wenn er eine bestimmte Handlungsentscheidung des Agent beobachten kann. Auf diesem Prinzip aufbauend soll nun das Konzept des Perfekten Bayes-Gleichgewichts in Signaling-Spielen erläutert werden.

3.1.1 Perfektes Bayes-Gleichgewicht im Signaling-Spiel:

Zum besseren Verständnis sei das Signaling-Spiel auf zwei Spieler beschränkt. Spieler 1 ist der Agent. Nur er kennt die genaue Ausprägung $\theta \in \Theta$ seines Typus. Spieler 2 ist der Principal. Er kennt zwar die Menge Θ der verschiedenen Typen von Agents, sowie die a priori Wahrscheinlichkeitsverteilung p auf Θ, weiß jedoch nicht, mit welcher Art von Agent er sich im Spiel genau konfrontiert sieht. Weiter sei $\mathcal{A}_1$ die Menge der Handlungsmöglichkeiten von Spieler 1, sowie $\mathcal{A}_2$ die Menge der Handlungsmöglichkeiten von Spieler 2. p, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind jeweils beiden Spielern bekannt.

$u_i(a_1, a_2, \theta)$bezeichne den Nutzen, der sich für Spieler i ergibt, falls die Handlungen $a_1 \in \mathcal{A}_1$ und $a_2 \in \mathcal{A}_2$ gespielt werden. Dieser Nutzen ist jedoch abhängig von der genauen Ausprägung $\theta \in \Theta$ des Typus von Spieler 1. Folglich wird sich somit die Wahl der Strategie von Spieler 1 im Allgemeinen ebenso in Abhängigkeit von θ ergeben, sodass er seinen Handlungsmöglichkeiten unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zuordnet, je nachdem, von welchem Typus er ist. Seine Strategie sei also im Folgenden die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\sigma_1(\cdot|\theta)$ auf der Menge der möglichen Handlungen a_1, bedingt auf seinen Typus θ.

Analog bezeichne $\sigma_2(\cdot|a_1)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Spieler 2 auf der Menge seiner möglichen Handlungen a_2, gegeben dass er die Handlungsentscheidung a_1 von Spieler 1 beobachtet.

Vorausgesetzt, Spieler 2 spielt die Strategie $\sigma_2(\cdot|a_1)$ ergibt sich für einen Spieler 1 vom Typ θ bei Spielen der Strategie $\sigma_1(\cdot|\theta)$ somit ein Nutzen von

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2, \theta) = \sum_{a_1} \sum_{a_2} \sigma_1(a_1 \mid \theta) \sigma_2(a_2 \mid a_1) u_1(a_1, a_2, \theta).$$

Analog ergibt sich für einen Spieler 2 mit Strategie $\sigma_2(\cdot|a_1)$ ex ante (also vor Beginn des Spiels) ein Nutzen von

$$\sum_{\theta} \mathrm{p}(\theta) \left(\sum_{a_1} \sum_{a_2} \sigma_1(a_1 \mid \theta) \sigma_2(a_2 \mid a_1) u_1(a_1, a_2, \theta) \right).$$

Spieler 2 legt sich somit für jeden Typus θ von Spieler 1 eine Strategie $\sigma_2(\cdot|a_1)$ zurecht, mit der er auf die Handlung von Spieler 1 antwortet. Seinen ex ante Gesamtnutzen errechnet er nun als den mit der a priori Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\theta)$ gewichteten Durchschnitt der einzelnen Nutzen.

Der entscheidende Punkt bei der Suche nach Bayes-perfekten Gleichgewichtsstrategien $\sigma_1(\cdot|\theta)$ und $\sigma_2(\cdot|a_1)$ bei Signal-Spielen besteht nun darin, dass Spieler 2 anhand der beobachtbaren Handlungswahl von Spieler 1 zusätzliche Informationen über den Typus von Spieler 1 gewinnt. Auf Grundlage der Kenntnis über die Handlung von Spieler 1, kann Spieler 2, im Gleichgewichtsfall, die ihm bekannte a priori Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\theta)$ der möglichen Typen von Spieler 1 gemäß Bayes Rule zu einer a posteriori Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu(\cdot|a_1)$ auf Θ aktualisieren. Gegeben eine beobachtete Handlung a_1 von Spieler 1 gilt es nun für Spieler 2, seinen Nutzen bezüglich der aktualisierten Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu(\cdot|a_1)$ zu maximieren. Dabei ergibt sich der auf die Handlung a_1 bedingte Nutzen für Spieler 2 nun zu

$$\sum_{\theta} \mu(\theta \mid a_1)\, u_2(a_1, \sigma_2(\cdot \mid a_2), \theta) = \sum_{\theta} \sum_{a_2} \mu(a_1 \mid \theta) \sigma_2(\, a_2 \mid a_1\,) u_2(a_1, a_2, \theta).$$

Ausgehend von dieser neuen Nutzenfunktion für Spieler 2 kann man nun das Perfekte Bayes- Gleichgewicht analog zum Nash-Gleichgewicht definieren als:

Definition 1.2 (Perfektes Bayes-Gleichgewicht)
Das perfekte Bayes-Gleichgewicht eines Signaling-Spiels ist eine Strategiekombination σ^* *bezüglich einer a posteriori Wahrscheinlichkeitsverteilung* $\mu(\cdot|a_1)$*, so dass:*

(P1) $\forall\theta, \sigma_1^*(\cdot\ |\theta) \in \arg\max_{\sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2^*, \theta)$,
(P2) $\forall a_1, \sigma_1^*(\cdot\ |a1) \epsilon \arg\max_{\sigma_2} \sum_\theta \mu(\,\theta \mid a_1\,) u_2(a_1, \sigma_2, \theta)$, und

(B) $\mu(\,\theta \mid a_1\,) = \frac{p(\theta)\sigma_1^*(a_1|\theta)}{\sum_{\theta' \epsilon \Theta} p(\theta')\sigma_1^*(a_1|\theta')}$, falls $\sum_{\theta' \epsilon \Theta} p(\theta')\sigma_1^*(a_1 \mid \theta') > 0$,

$\mu(\cdot|a1)$ = *beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf* Θ*, falls*

$$\sum_{\theta' \epsilon \Theta} p(\theta')\sigma_1^*(\,\hat{a}_1 \mid \theta') = 0$$

Dabei bedeutet (*P*1), dass Spieler 1 in der Wahl seiner optimalen Strategie den Einfluss berücksichtigen muss, den seine Handlung a_1 auf die Handlungsentscheidung von Spieler 2 hat. Dieser Einfluss wiederum wird durch (*P*2) bestimmt: Spieler 2 wählt seine Strategie so, dass er gemäß Bayes-Rule (B) zu jeder möglichen Handlung a_1 eine aktualisierte a posteriori Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Typus Θ errechnet, die er der Wahl seiner optimalen Antwort zu Grunde legt.

Angenommen, für eine gewisse Handlung $\hat{a}_1$ gilt nun folgendes: $\hat{a}_1$ ist für keinen Typus θ von Spieler 1 Teil seiner optimalen Strategie. Das bedeutet, dass $\hat{a}_1$ also von keinem Typus θ gespielt wird. $\hat{a}_1$ ist somit ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit Null, sodass gilt:

$$\sum_{\theta' \epsilon \Theta} p(\theta')\sigma_1^*(\hat{a}_1 \mid \theta') = 0$$

Somit ist der Nenner bei Bayes Rule gleich Null, sodass Bayes Rule keine aktualisierten Wahrscheinlichkeiten liefert, falls $\hat{a}_1$ doch auftreten sollte, weil es bspw. versehentlich gespielt wurde. Der zweite Fall von (B) besagt in diesem Falle folgendes: jede beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung kann als a posteriori Verteilung angenommen werden.

Auch wenn man nach dem Prinzip des Perfekten Bayes-Gleichgewichts prinzipiell also völlige Wahlfreiheit bei der Bestimmung einer a posteriori Verteilung besitz, so sollte die Wahlfreiheit dennoch mit Vorsicht genossen werden, um den Spielausgang nicht auf Grund unplausibel gewählter Verteilungen zu sehr zu beeinträchtigen. Eine relativ unproblematische Wahl scheint in diesem Fall bspw. die Anwendung der ursprünglichen a priori Verteilung zu sein.

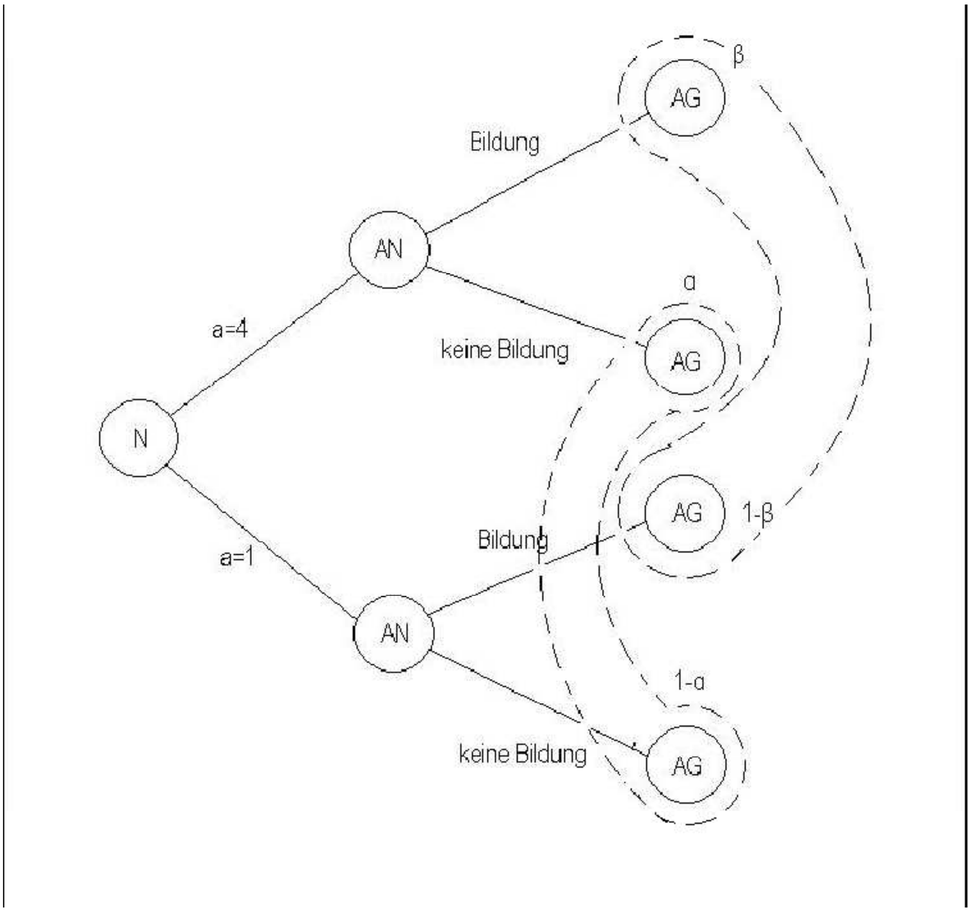
3.1.2 Signaling Beispiel:

Der Arbeitsmarkt bestehe zu gleichen Anteilen aus zwei verschiedenen Typen von Arbeitnehmern (AN): solche mit einer Produktivität im Wert von 4 Geldeinheiten und solche mit einer Produktivität von 1 Geldeinheit. Die eigene Produktivität ist jedem AN selber bekannt. Für einen potentiellen Arbeitgeber (AG) jedoch ist es nicht ersichtlich, von welcher Produktivität ein sich bewerbender AN ist. Nun hat jeder AN zusätzlich die Möglichkeit, sich mit Kosten von $\frac{8}{a}$ Bildung anzueignen, wobei a die jeweilige Produktivität des AN bezeichnet. Diese Bildung hat jedoch auf die Produktivität in der Arbeit selber keinen Einfluss.

Lösung:

Der entscheidende Aspekt in diesem Spiel liegt darin, dass der Erwerb von Bildung für einen AN unterschiedliche Kosten verursacht, je nachdem, von welcher Produktivität er ist. So muss ein AN der Produktivität a = 4 nur Kosten in Höhe von 2 aufbringen, wobei ein AN der Produktivität a = 1 Kosten in Höhe von 8 auf sich nehmen müsste. Der Schlüssel zur Lösung dieses Spiels besteht also darin, dass ein AN von hoher Produktivität die relativ gesehen geringen Kosten für Bildung auf sich nimmt, um dem Arbeitgeber ein Signal über seine gute Produktivität zu übermitteln. Im Folgenden bezeichne H einen AN hoher Produktivität, und N einen AN niedriger Produktivität. Des Weiteren stehe B für Bildung, und K für keine Bildung. Die unterschiedlichen Festgehälter werden mit g_H und g_N benannt.

In einem ersten Schritt kann das Spiel mit unvollständiger Information nun in ein Spiel von unvollkommener Information umgewandelt werden. Dies geschieht, indem man dem Spiel einen zusätzlichen Spieler ”Natur“ hinzufügt, der jeweils mit Wahrscheinlichkeit p = 0, 5 entweder einen AN hoher oder niedriger Produktivität auswählt. Als nächstes kann sich nun der AN vom zufällig ausgewählten Typus entweder für die Investition in Bildung oder dagegen entscheiden. Zu beachten ist an dieser Stelle, dass der Arbeitnehmer seinen eigenen Typus kennt, d.h., dass er weiß, an welchem Knoten im Spielbaum er sich genau befindet. Als nächstes kommt der AG an die Reihe. Für ihn ist jedoch unbekannt, an welchem Knoten er sich genau befindet, da ein AN aus seiner Sicht ununterscheidbar bzgl. Seiner Produktivität ist. Die einzige Information, die ein AG besitzt, ist, ob der AN über Bildung verfügt, oder nicht. Die Unkenntnis über seinen genauen Knoten kann in einer Grafik bspw. dadurch verdeutlicht werden, dass eine gestrichelte Linie um alle Knoten eingezeichnet wird, die vom AG nicht unterschieden werden können. Grafisch veranschaulicht ergibt sich für das Spiel also folgendes Bild:



3.1.3 ”Seperating“ Bayes-Gleichgewicht

Als erstes soll das Spiel nun auf ein sogenanntes ”Seperating“ Bayes Gleichgewicht untersucht werden, d.h., auf ein Bayes-Gleichgewicht, bei dem sich die AN, je nachdem, von welchem Typus sie sind, auch für unterschiedliche Handlungsweisen entscheiden. Dement-sprechend kann eine AG also anhand des Bildungsgrades des AN exakt unterscheiden, mit welchem Typus er es zu tun hat. Jedem AN kann also ein seiner Produktivität entsprechen-des Festgehalt gezahlt werden.

1. Fall: AN hoher Produktivität entscheiden sich für Bildung, AN niedriger Produktivität dagegen.

Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt, entspricht dies:

$\mathbb{P}$(B|H) = 1, und $\mathbb{P}$(K|H) = 0
$\mathbb{P}$(B|N) = 0, und $\mathbb{P}$(K|N) = 1

Zusammen mit Bayes' Rule ergibt sich also:

$$\alpha \coloneqq \mathbb{P}(H \mid K) = \frac{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(K \mid H)}{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(K \mid H) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}(K \mid N)} = \frac{0{,}5 * 0}{0{,}5 * 0 + 0{,}5 * 1} = 0$$

$$\beta \coloneqq \mathbb{P}(H \mid B) = \frac{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(B \mid H)}{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(B \mid H) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}(B \mid N)} = \frac{0{,}5 * 1}{0{,}5 * 1 + 0{,}5 * 0} = 1$$

Deshalb kann ein AG, wenn er auf einen AN mit Bildung trifft, mit Sicherheit sagen, dass dieser AN von hoher Produktivität ist. Er wird ihm also ein hohes Festgehalt von g_H = 4 entsprechend seiner Produktivität a = 4 bezahlen. Analog ergibt sich g_N = 1 für einen AN ohne Bildung. Um nun zu überprüfen, ob die Strategiekombination {($B|H$), ($K|N$); g_H = 4 g_N = 1} ein perfektes Bayes-Gleichgewicht ist, muss untersucht werden, ob die Strategie von AN auch beste Antwort auf g_H = 4 und g_N = 1 ist, oder ob einer der beiden unterschiedlichen Typen von AN abweichen will. Dabei bezeichne Π den Payoff für den jeweiligen Typus / Bildungsgrad:

Sei a=4: $\Pi_{H,B} = g_H - 8 * \frac{1}{a} = 4 - 2 = 2 \geq 1 = g_N = \Pi_{H,K}$

Sei a=1: $\Pi_{N,B} = g_H - 8 * \frac{1}{a} = 4 - 8 = -4 \leq 1 = g_N = \Pi_{N,K}$

Es ergibt also für keinen der beiden Typen von AN einen Sinn, von der Strategie abzuweichen. Somit ist die Strategiekombination {($B|H$), ($K|N$); w_H = 4, w_N = 1} ein perfektes Bayes-Gleichgewicht.

2. Fall: AN niedriger Produktivität entscheiden sich für Bildung, AN hoher Produktivität dagegen.

Der Vollständigkeit halber muss auch dieser Fall untersucht werden. Dass die Strategiekombination {($B|N$), ($K|H$); g_H = 4, g_N = 1} jedoch kein Gleichgewicht sein kann, erkennt man unmittelbar daran, dass ein AN niedriger Produktivität selbstverständlich keine Kosten für Bildung auf sich nehmen wird, nur um dem AG seine niedrige Produktivität zu signalisieren. Dementsprechend würde solch ein AN abweichen auf $(K|N)$. Es ergibt sich also kein weiteres ”Seperating“ Bayes-Gleichgewicht.

3.1.4 ”Pooling“ Bayes-Gleichgewicht

Im Folgenden soll das Spiel auf sogenannte ”Pooling“ Bayes-Gleichgewichte untersucht werden.

Dabei wird ein Bayes-Gleichgewicht als Pooling bezeichnet, wenn die unterschiedlichen Typen von AN im Gleichgewichtsfall beide die gleiche Handlung wählen. In diesem Beispiel bedeutet das, dass sich entweder beide AN dafür entscheiden, sich Bildung anzueignen, oder dass beide AN keine Bildung wählen.

1. Fall: Beide AN entscheiden sich gegen Bildung

Mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt, entspricht dies:

$\mathbb{P}(B|H) = 0$, und $\mathbb{P}(K|H) = 1$
$\mathbb{P}(B|N) = 0$, und $\mathbb{P}(K|N) = 1$

sodass sich zusammen mit Bayes’ Rule folgende Wahrscheinlichkeiten ergeben:

$$\alpha \coloneqq \mathbb{P}(H \mid K) = \frac{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(K \mid H)}{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(K \mid H) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}(K \mid N)} = \frac{0,5 * 1}{0,5 * 1 + 0,5 * 1} = 0,5$$

$$\beta \coloneqq \mathbb{P}(H \mid B) = \frac{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(B \mid H)}{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(B \mid H) + \mathbb{P}(N)\mathbb{P}(B \mid N)} = \frac{0,5 * 0}{0,5 * 0 + 0,5 * 0} = \frac{0}{0}$$

Dies bedeutet also, dass ein AG keine zusätzlichen Informationen aus der Erkenntnis erhält, dass ein AN keine Bildung vorweisen kann. Der AG kann die Wahrscheinlichkeitsannahmen, die er bezüglich der Verteilung der jeweiligen Charakteristik des AN hat, somit nicht aktualisieren bzw. verbessern. Er ist also nicht gewillt, einem AN ohne Bildung ein höheres Festgehalt zu zahlen,

$$g_N = \mathbb{P}(H \mid K) * 4 + \mathbb{P}(N \mid K) * 1 = 0,5 * (4 + 1) = 2,5$$

Analog ergibt sich das Festgehalt eines AN mit Bildung ganz allgemein wieder zu

$$g_H = \mathbb{P}(H \mid B) * 4 + \mathbb{P}(N \mid B) * 1 = 3\beta + 1$$

Das Problem hier ist jedoch, dass β:= P($H|B$) in diesem Fall nicht nach Bayes' Rule bestimmt werden kann. Für β muss also eine beliebige Out-of-Equilibrium Wahrscheinlichkeit gewählt werden, da jeder Knoten, bei dem der AN Bildung gewählt hat, bei der vorgegebenen Strategie nicht vorkommt. Nun kann in Abhängigkeit der zu wählenden Wahrscheinlichkeit β untersucht werden, ob die Strategiekombination {($K|N$), ($K|H$); g_H = 3β + 1, g_N = 2, 5} ein Gleichgewicht bildet.

Dafür muss gelten:

$$\Pi_{H,K} \geq \Pi_{H,B} \; und$$

$$\Pi_{N,K} \geq \Pi_{N,B}$$

Daraus folgt:

$$2{,}5 \geq 3\beta + 1 - 2$$
$$\Leftrightarrow 3{,}5 \geq 3\beta$$
$$\Leftrightarrow \beta \leq \frac{3{,}5}{3}$$

sowie:

$$2{,}5 \geq 3\beta + 1 - 8$$
$$\Leftrightarrow 9{,}5 \geq 3\beta$$
$$\Leftrightarrow \beta \leq \frac{9{,}5}{3}$$

Da $0 \leq \beta \leq 1$gilt somit also immer auch $\beta \leq \frac{3{,}5}{3} \leq \frac{9{,}5}{3}$. Ein Abweichen von der Strategiekombination {($K|N$), ($K|H$); g_H = 3β+1, g_N = 2, 5} lohnt sich also nicht. Es ergibt sich demnach also ein Pooling Bayes-Gleichgewicht, unabhängig davon, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung man für die Out-of-Equilibrium Wahrscheinlichkeit β festlegt.

Der Grund dafür, dass sich ein Abweichen für den AN unabhängig von der Wahl von β niemals lohnt, liegt jedoch hauptsächlich darin, dass die Kosten für das Signal Bildung zu hoch gewählt wurden. Angenommen, bei einem AN hoher Produktivität würde das Signal Bildung nur Kosten von 0,5 (anstatt 2) ergeben, dann würde sich folgendes Bild ergeben:

$$2{,}5 \geq 3\beta + 1 - 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow 2 \geq 3\beta$$
$$\Leftrightarrow \beta \leq \frac{2}{3}$$

In diesem Falle würde sich also ein Abweichen für den AN mit hoher Produktivität immer dann lohnen, wenn die Out-of-Equilibrium Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{2}{3}$ übersteigt. Die Wahl der Out-of-Equilibrium Wahrscheinlichkeit kann also maßgeblichen Einfluss auf Perfekte Bayes-Gleichgewichte haben.

<u>2. Fall</u>: Beide AN entscheiden sich für Bildung

Der Vollständigkeit halber muss auch dieser Fall untersucht werden, auch wenn es in diesem Beispiel offensichtlich ist, dass es für beide AN keinen Nutzen bringt, die Kosten für Bildung aufzubringen. So ergibt sich für einen AN der Produktivität 1 zum Beispiel:

$$\Pi_{N,B} = g_N - 8 * \frac{1}{a},$$

mit g_N = 0, 5 * 4 + 0, 5 * 1 = 2, 5. Also gilt

$$\Pi_{N,B} = 2{,}5 - 8 = -5{,}5$$

Der AN hätte also einen negativen Nutzen, weshalb er natürlich von der Strategie abweichen würde. Es ergibt sich somit kein Pooling-Gleichgewicht für den Fall, dass beide AN sich für Bildung entscheiden.

3.2 Screening

Eine zweite Möglichkeit, das Problem der Adverse Selection in den Griff zu bekommen, ist das sogenannte Screening. Der Unterschied zum Signaling besteht hierbei darin, dass es nun der uninformierte Principal ist, der hier die Initiative ergreift. So versucht er das Problem der asymmetrischen Informationsverteilung dadurch zu umgehen, dass er dem Agent verschiedene Vertragsmöglichkeiten zur Auswahl gibt. Diese Verträge sind derart gestaltet, dass die unterschiedlichen Agents jeweils verschiedene Verträge wählen werden. Auf diese Weise kann der Principal nun dem Nachteil begegnen, der sich durch sein geringeres Informationsniveau gegenüber dem Agent ergibt, indem er die Agents dazu bringt, dass sie ihren Typus zu erkennen geben.

3.2.1 Beispiel:

Bei einer Bank stellen zwei unterschiedliche Firmen einen Kreditantrag. Beide Firmen verfügen über eine Investitionsmöglichkeit, für die sie 30 Euro von der Bank benötigen. Jedoch wird der Wert der Firma A zum Ende der Periode mit Sicherheit 100 Euro betragen, während der Wert der Firma B mit Wahrscheinlichkeit 0,5 den Wert 200 Euro annehmen wird, und mit derselben Wahrscheinlichkeit den Wert Null. Die Bank kann jedoch nicht zwischen Firma A und Firma B unterscheiden. Des Weiteren beträgt der risikolose Zinssatz 10 Prozent, und die Bank ist risikoneutral. Auf welche Weise kann die Bank nun ein Paar von Verträgen anbieten, sodass beide kreditnehmende Firmen ihren Risikotypus preisgeben?

Lösung:

Der entscheidende Punkt bei der Lösung dieses Problems besteht darin, den Firmen zwei verschiedene Verträge anzubieten: einen besicherten Vertrag und einen unbesicherten Vertrag. Diese Verträge müssen wiederum derart gestaltet sein, dass Firma A (der sichere Kreditnehmer) den besicherten Vertrag wählt, und Firma B (der risikoreiche Kreditnehmer) den unbesicherten. Die Lösung erfolgt in drei Schritten: in den ersten beiden Schritten wird jeweils der Zinssatz für die kreditnehmende Firma berechnet, unter der Voraussetzung, dass die Bank weiß, mit was für einem Kreditnehmer sie es zu tun hat. Im dritten Schritt wird dann die Höhe der zu hinterlegenden Sicherheit errechnet, die nötig ist, um Firma B davon abzuhalten, den besicherten Kredit zu wählen, anstatt den unbesicherten Kredit, der für sie vorgesehen ist.

Schritt 1: Weil A seinen Kredit mit Sicherheit zurückzahlen wird, beträgt der Zinssatz auf diesen Kredit exakt den Betrag, bei dem die Bank ihren "Break even" Punkt erreicht. Dieser Zinssatz entspricht genau dem risikolosen Zinssatz von 10 Prozent.

Schritt 2: Der Zinssatz r_u des unbesicherten Kredites wiederum muss die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{0{,}5 * (1 + r_u) * 30}{1{,}1} = 30.$$

Die linke Seite der Gleichung entspricht dabei dem abgezinsten Barwert des Payoffs der Bank. Dieser Payoff ergibt sich als die Rückzahlungssumme von 30 Euro multipliziert mit dem Zinssatz ($1+r_u$) für den Kredit und multipliziert mit einer Rückzahlungswahrscheinlichkeit von 50 Prozent, da B zu 50 Prozent nichts vom Kredit zurückzahlen kann. Damit die Bank auch hier wieder den "Break even" erreicht, muss die linke Seite der verliehenen Kreditsumme von 30 Euro entsprechen.

Lösung der Gleichung ergibt

$$1 + r_u = 2{,}2$$

sodass die Rückzahlungssumme des unbesicherten Kredites 66 Euro beträgt.

Schritt 3: Nun muss die Höhe der Sicherheit S errechnet werden, die Firma B davon abhält, sich als Firma A auszugeben, um den besicherten Vertrag mit niedrigerem Zinssatz zu erhalten. Um Firma B zwischen beiden Verträgen indifferent zu machen, muss für S folgende Gleichung gelöst werden:

$$0,5 \cdot (200 - 66) = 0,5 \cdot (200 - 33) - 0,5 \cdot S$$

Dabei entspricht die linke Seite dem erwarteten Payoff für Firma B, wenn sie den unbesicherten Vertrag wählt, bei dem sie im Erfolgsfall des Investitionsprojektes 66 Euro an die Bank zurückzahlen muss. Die rechte Seite entspricht dagegen dem Payoff bei Wahl des besicherten Vertrages. Damit muss die Firma im Erfolgsfall nur 33 Euro an die Bank zurückzahlen. Falls das Projekt jedoch schief läuft, ist der Firmeninhaber verpflichtet, der

Bank die Sicherheit in Höhe von S zu erstatten. Auflösen der Gleichung nach der Sicherheit S ergibt $S = 33$.

Falls die Bank also eine Sicherheit von mindestens 33 Euro verlangt, wird nur Firma A sich für den besicherten Vertrag mit niedrigem Zinssatz entscheiden. Firma B wählt den unbesicherten Vertrag. Die Bank kann auf diese Weise also die Kreditnehmer nach ihrem Risiko unterscheiden.

Das Ergebnis ist ein Nash-Gleichgewicht, in dem die Annahmen der Bank, welcher Kreditnehmer sich für welchen Vertrag entscheidet, durch die Handlungen der Kreditnehmer bestätigt werden.