Projektarbeit
Vier Gewinnt

Vorlesung Spieltheorie
WS 08/09
Prof. Martin Schottenloher

Benjamin Ruile
Bernhard Weiß
Mathias Ditsche
Nicolas Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Viele Strategie- und Gesellschaftsspiel sind dynamische Spiele nach der Spielthoerie. Das Prinzip ist ganz simpel, ein Spieler beginnt und der/die Gegner ist anschließend am Zug. Es wird ein Ziel festgelegt, dessen Erreichen den Sieg bedeutet.
Wir wollen uns bei diesem Projekt mit einem allseits bekannten „Kinderspiel“ beschäftigen, welches eine Weiterentwicklung des in der Spieltheorie viel verwendetet Beispiels „Tic Tac Toe“ ist, „Vier gewinnt“.

Ein großes Augenmerk soll hierbei auf die Spieltheorie gelegt werden und die Grenzen die Spiele dieser Art der reinen Mathematik bescheren.

Am Ende soll mit Hilfe dieser Erkenntnisse ein Computerspiel „Vier gewinnt“ entwickelt werden, bei dem der Computer ähnlich wie bei einem Schachcomputer je nach Schwierigkeitgrad spielt und bei hoher Stufe sicher gewinnt.

Die Lösung des Spiel geht auf die Veröffentlichungen von Victor Allis und James D. Allan zurück welche im Jahr 1988 unabhängig von einander bereits gezeigt haben, das „4 Gewinnt“ vollständig gelöst ist und es für den beginnenden Spieler immer möglich ist zu gewinnen.

Dennoch haben wir gerade in der Einführung und in der Nomenklatur auf die Arbeit von Allis zurückgegriffen, da sie in unseren Augen gut gewählt ist und jede andere nur geringe Änderungen wären, ebenso sind einige Beispiel aus dieser Arbeit übernommen da sie prägnant und einfach sind.

Teil I
Spieltheoretische Untersuchung

1 Das Spiel „Vier gewinnt“

Dies soll eine kurze Einführung in das Spiel „Vier gewinnt“ werden in dem die Regel vorgestellt und eine für diesen Text eindeutige Nomenklatur eingeführt.

1.1 Die Regeln von „Vier gewinnt“

„Vier gewinnt“ ist ein zwei Personen Spiel, bei dem jeder der Spieler 21 identische Spielsteine bestitz. In der Originalversion haben diese die Farben gelb und rot.
Das Spiel wird auf einem rechteckigen Spielfeld mit sieben Spalten und 6 Zeilen gespielt. Die Spielsteine werden von den beiden Spielern abwechselnd in eine der Spalten geworfen.
Wenn ein Spieler einen Spielstein in eine Spalte wirft, fällt dieser in die letzte unbesetzte Zeile. Sind in einer Spalte alle 6 Zeilen besetzt so kann dort kein Stein mehr hineingeworfen werden. Im weiteren Verlauf nennen wir das werfen eines Steins einen Zug machen.

Im allgemeinen gibt es keine Regeln welche Farbe bzw. welcher Spieler beginnt, der Einfachheit halber werden wir hier davon ausgehen, dass immer der Spieler mit den gelben Steinen starten darf, ähnlich Schach oder Dame bei denen die weißen Steine stets beginnen.

Beide Spieler werden nun im Verlauf des Spiels versuchen vier zusammenhängende Spielsteine im Gitter zu positionieren. Dies ist entweder in vertikaler, horizontaler oder diagonaler Position möglich. Der erste Spieler der dies geschafft hat gewinnt das Spiel. Sind alle 42 Spielsteine gespielt und es hat kein Spieler geschafft vier zusammhängende Steine zu erreichen, so endet das Spiel unentschieden.

Die nachfolgenden Diagrammen zeigen einige Situationen in denen Gelb gewinnt.

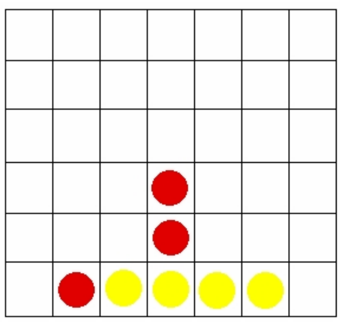


Abbildung 1: Diagramm I.1.1

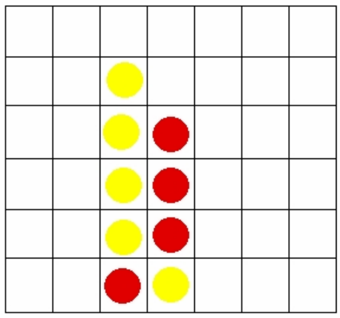


Abbildung 2: Diagramm I.1.2

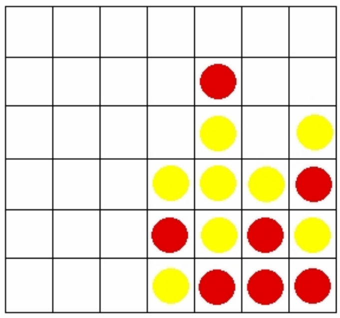


Abbildung 3: Diagramm I.1.3

Und nun eine Spielsituation in der das Spiel unentschieden ausgeht.

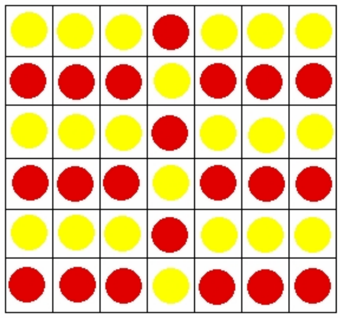


Abbildung 4: Diagramm I.1.4

1.2 Nomenklatur

Um es nun einfacher zu machen die verschiedene Spielsituationen und Spielzüge zu beschreiben führen wir für das Spielraster eine Indizierung ein.
Ähnlich wir beim Schach benennen wir die 7 Spalten mit von links nach rechts mit „a“ bis „g“ und die 6 Zeilen mit „1“ bis „6“. Nach dieser Nomenklatur wäre z.B. das unterste Feld in der Mitte d1.
Ebenso ist es Möglich das Spiel, bzw. die Züge so zu beschreiben. Das Beispiel in Diagramm 2.1 sähe wie folgt aus, wobei die Nummer zu Beginn die Spielrunde angibt:

1. d1, d2
2. c1, d3
3. e1, b1
4. f1, gelb gewinnt.

In gleicher Weise ist es möglich die Gewinngruppe, also die vier Steine welche eine Linie Bilden anzugeben.
Wir verdeutlichen dies wieder an Diagramm 2.1, wo die Gewinngruppe c1,d1,e1,f1 ist.
Da es sich bei der Gewinngruppe immer um eine Linie handelt würde es sogar ausreichen nur Anfangs- und Endpunkt zu nennen.

1.3 Strategische Vorgaben für die Spieler

Vorweg wollen wir einige Verhaltensregeln für die Spieler festlegen, welche zwar logisch sind, doch in eigenen Annahmen im folgenden vorausgesetzt werden.
Für die Spieler sollen Annahmen gelten:

1. Wenn man gewinnen kann so spielt der Spieler seinen Gewinnzug
2. Hat der Gegner die Möglichkeit zu gewinnen verhindert man es

3. Bevor man den Gegner gewinnen lässt, gibt man seine eigene Gewinnposition auf

Mit diesen Annahmen soll im Prinzip nur ein unlogisches Verhalten von vorne herein ausgeschlossen werden, um Äste im Baum aszshließen die nie gespielt werden würden. Des weiteren gehen wir davon aus, dass die Spieler keine Fehler machen, also verhinderbare Gewinnditiuationen des Gegners übersehen, oder ihm unbewusst welche zu ermöglichen. Damit ist gewährleistet, dass man von „perfekten“ Spielern ausgehen kann und wirklich nur solche Positionen gespielt werden, die auch dann gespielt werden wenn man den vollständigen Spielbaum kennen würde.

Es handelt sich hierbei sicher um Einschränkungen gegenüber dem „normalen“ Spiel in der Realität, aber Spieltheoretisch macht es keine Unterschied.

2 Spieltheoretische Herangehensweise

In diesem Kapitel wollen wir nach den Vorgaben aus der Vorlesung an das Spiel herangehen, also den Spielbaum und die Historienmenge betrachten und die Schwierigkeiten dieser Herangehensweise aufzeigen.

2.1 Probleme der Spieltheorie bei Komplexen Spielen

Da es sich bei „4 Gewinnt“ um ein 2 Personen Nullsummenspiel mit vollständiger Information handelt wäre es bei der Analyse, nach unserer Vorlesung, die Rückwärtsinduktion zu benutzen. Hierzu wäre aber ein vollständiger Spielbaum nötig, welcher bei diesem Spiel enorm groß wäre.
Diagramm I.2.1 zeigt die erste Runde also 2 geworfene Steine.

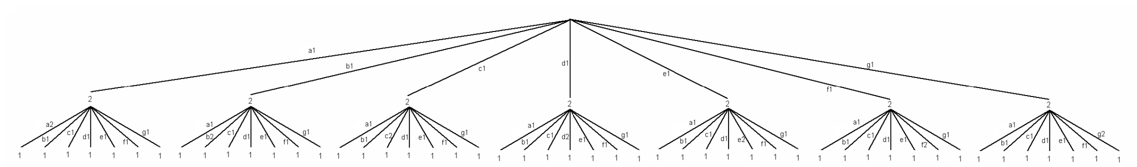


Abbildung 5: Diagramm I.2.1

Hier sehen wir das nach nur einer Runde bereits $7 \cdot 7 = 49$ Äste, also mögliche Ergebnisse haben. Der Baum würde also sehr groß und für eine vollständige Analyse zu kompliziert.
Eine Möglichkeit ist es den Spielbaum zu vereinfachen, also Nutzlose Züge wegzulassen, oder aber auch gewissen Positionen einen Wert zuzuweisen und so nur die „wertvollsten“ Züge zu machen. Letzter Methode werden wir in Abschnitt I.2.3 versuchen, zuvor jedoch betrachten wir den gesamten Spielbaum und versuchen abzuschätzen wie groß er ist, wie viele Spielverläufe es also geben kann.

Versuchen wir nun abzuschätzen wie groß der Spielbaum ist, wie viele Äste wir untersuchen müssten:
Wir wollen also eine obere Grenze für die Anzahl der Knoten finden und so herausfinden wie viele Spielsituationen es gibt.
Eine Möglichkeit ist es über die Kombinatorik an das Problem heranzugehen. Hierzu sollten wir zunächst unterscheiden welche Spielsituationen es geben kann und ob sie zulässig sind oder nicht. Ganz banal ist es man nimmt an, dass es $6 \cdot 7 = 42$ Felder also mögliche Positionen gibt, die immer einen von drei Zuständen haben, nämlich gelb, rot oder leer. Daraus könnte man schließen das es $3^{42} = 1,09419 \cdot 10^{20}$ Spielsituationen also Knoten gibt. Dies ist natürlich eine sehr grobe Abschätzung da es eine Vielzahl von „illegalen“ also unmöglichen Spielsitationen gibt.

Wir müssen also Situationen identifizieren die nicht möglich sind. Es gibt in zwei Möglichkeiten die ausgeschlossen erden müssen, erstens das die roten Steine nach einer Runde nur auf Plätzen liegen die erreicht werden können also z.B nicht wie in Abbildung 6.

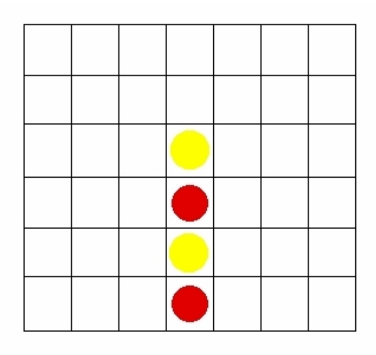


Abbildung 6: Diagramm I.2.2

Hier ist leicht zu sehen das Rot begonnen haben müsste um diese Position zu erreichen, was wir aber in der Einführung ausgeschlossen haben.
Welche Positionen sind also nach jeder Runde zulässig? Intuitiv ist es klar, was nicht passieren darf eine Zahl, bzw. eine mathematische Formulierung dafür zu finden ist nicht so einfach.
Auch für den anderen Fall, das auftreten mehrerer „Vierer“ also Gewinnpositionen nicht ohne weiteres Möglich.

Wir versuchen dennoch eine bessere Abschätzung zu finden, nehmen hierbei aber zumindest in Kauf mehrere Vierer zu bekommen. Diese Grenze versuchen wir über den Spielbaum zu identifizieren, indem wir die Knoten einfach Iterieren.

Im folgenden vernachlässigen wir also, dass das Spiel nach weniger wie 21 Runden also 42 Zügen zu Ende ist.
Wir wissen, dass in den ersten 3 Runden also ersten 6 Zügen jeder Spieler immer 7 Möglichkeiten hat, da keine Reihe bis Oben gefüllt sein kann also haben wir $7^6 = 117.649$ Knoten.
Führen wir das weiter haben wir:$6^5+6^4\cdot7+6^3\cdot7^2+6^2\cdot7^3+6^2\dot{7}^4+6\cdot7^5+7^6 = 332.738$ Mögliche Züge pro erstem Abzweig, also in Summe $7\cdot 332.738 = 2.328.166$. Man erkennt schnell das man diese Menge auf diese Weise nicht gut Abschätzen kann.
Selbst wenn man annimmt, das man immer 7 Möglichkeiten hat pro Zug kommt man auf $7^{21} = 5,5845641 \cdot 10^{17}$, was gegenüber der gröbsten Abschätzung eine Verbesserung von nur $1,088604433 \cdot 10^{20}$ wäre. Wir stellen also fest, dass man auf diese Weise keine bessere Schranke finden kann. Deshalb greifen wir hier auf die Arbeit von Allis zurück, welche unter Hinzunahme aller „illegaler“ Positionen eine Schranke von $7,1 \cdot 10^{13}$ möglichen Positionen über einen Computer errechnen lies.

Obiger Versuch zeigt schnell, dass man mit der klassischen mathematischen Herangehensweise kaum eine Möglichkeit hat solche Spiele zu lösen. Welche anderen Optionen hat man aber um komplexe Spiele zu lösen, ganz klar die Hilfe von Rechner in Anspruch zu nehmen. Aber auch hier stößt man schnell auf Probleme, denn Rechenzeit ist ersten teuer wenn es um so komplexe Berechnungen geht und andererseits wollen wir aus der Erkenntnis natürlich auch einen Nutzen ziehen, also für unser nächstes Spiel einen Vorteil für uns haben. Lange Rechendauer ist aber in jedem Fall kontraproduktiv da der Gegner nicht ewig auf unseren Zug warten wird bzw. Verdacht

schöpft und nicht gegen uns spielt.
Dies ist in allen Spielen dieser Art, Schach, Dame, Mühle usw.., aber auch in den klassischen Glücksspielen wie Poker etc. ein Problem. Was also tun um besser zu spielen als andere und dennoch schnell und gute Verfahren zu haben.

Die Antwort ist bestimmte Situationen auszuwerten und den Computer oder auch dem Menschen so die Chance geben mit nur wenigen Zügen im voraus besser zu sein.

2.2 Analyse einzelner Spielsituationen

Wie wir gerade gesehen haben ist es nicht möglich das Spiel „von Hand“ komplett zu analysieren oder „perfekt“ zu spielen. Und auch mit Hilfe von Computern ist es sehr schwer den ganzen Spielbaum in einer „vernünftigen“ Zeit durch zurechnen, was die Programmierung als Spiel erschwert. Wir müssen also sowohl für den Menschen als auch den Computer die Spieltiefe, also die Anzahl der Situationen die im voraus mit bedacht werden verringern.
Man betrachtet also an Stelle des ganzen Baumes nur noch wenige Schritte bzw. Knoten im voraus. Deshalb ist es wichtig bestimmten Positionen eine Wertigkeit zu geben, also einen Nutzen zuzuweisen, auch ohne alle weiteren möglichen Knoten zu kennen.
Hierzu zeigen wir das es gerade in Hinblick auf das Ende des Spiels gute und schlechte Positionen gibt und man durchaus eine Taktik finden kann um die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens zu erhöhen. Außerdem gehen wir auf das Problem des „Zugzwanges“ ein und wie man ihn für sich nutzen kann.

2.2.1 Konkrete Spielsituationen und deren Nutzen

Wir wollen zuerst eine Situation betrachten an der wir sehen können das es gute und schlechte Gewinnmöglichkeiten gibt. Betrachten wir hierzu das Diagramm I.2.2.

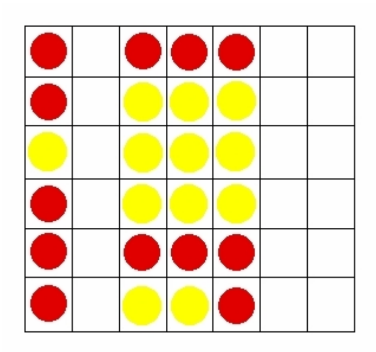


Abbildung 7: Diagramm I.2.2

Um an diese Stelle des Spiels zu gelangen wurden folgende Spielzüge gespielt:
1. d1, d2
2. d3, e1
3. d4, e2
4. d5, d6
5. c1, c2
6. c3, a1
7. c4, a2
8. c5, c6
9. e3, a3
10. a4, a5
11. e4, a6
12. e5, e6

Und da eine gerade Anzahl von Steinen gespielt ist, ist der gelbe Spieler an der Reihe den nächsten Zug zu machen.

Wir sehen ganz leicht, dass es sowohl für Gelb als auch für Rot Möglichkeiten gibt zu gewinnen. Gelb gewinnt mit den Positionen b2, b3, b4, b5, f3, f4 und f5, Rot hingegen mit b2, b6, f2 und f6. Und obwohl das Spiel noch nicht beendet ist, wird sollte beide Spieler den strategischen Regeln aus der Einführung folgen, Rot gewinnen
Warum ist das so?
Spielen wir das Spiel doch einfach einmal weiter. Gelb wird nicht in die Spalten b oder f werfen, da Rot gewinnen würde, also bleiben diese Reihen unbesetzt, Rot wiederum spielt ebenfalls nicht in diese Spalten, da er seine Position vernichten würde. Folglich wird Spalte g aufgefüllt. Da diese Reihe aber 6 Zeilen hat ist sie nach eine geraden Anzahl von Zügen ebenfalls und es ergibt sich die Situation in Diagramm I.2.3. nach den Zügen:
13. g1, g2
14. g3, g4
15. g5, g6

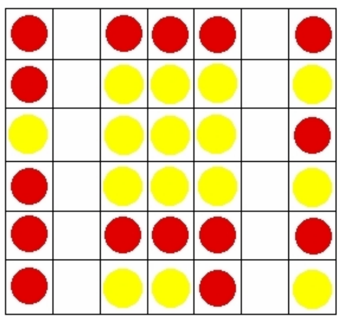


Abbildung 8: Diagramm I.2.3

Nun haben wir die Situation, dass Gelb gezwungen ist in die Position b1 oder f1 zu spielen, und Rot gewinnt. Das Spiel war so gesehen also schon nach den ersten zwölf Runden zu Ende und Gelb hatte verloren. Dies führt nun zur Frage welche Gewinnpositionen sind gut, kommen also zum Tragen und welche nicht, welchen sind also von Nutzen und Erstrebenswert. Ebenso sieht man hier das Phänomen des „Zugzwang", welchen wir später noch genauer untersuchen.

Bevor wir jedoch genauer auf den Nutzen von Gewinnpositionen eingehen wollen wir heraus finden wo Gelb den Fehler gemacht hat und ab wann das Spiel verloren war, bzw. welchen Zug Gelb besser gespielt hätte.
Gehen wir hierzu züruck in Runde 6, und habe Gelb bereits gespielt. Die bisherigen Züge ergeben folgendes Bild:
Schon hier lässt sich die Niederlage nicht mehr abwenden. Wir versetzten uns in die Position von Rot und überlegen kurz.

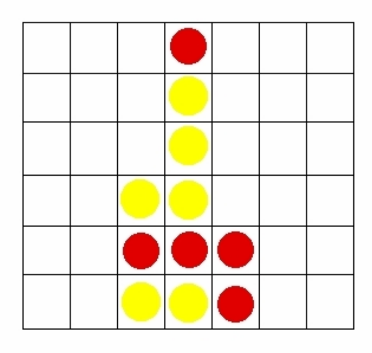


Abbildung 9: Diagramm I.2.2

Wo könnte Gelb eine Gewinnposition aufbauen. Schauen wir uns zuerst die horizontalen Möglichkeiten an. Hier gibt es die Möglichkeiten a1-d1, a3-d3, b3-e3, c3-f3, und evtl. höher, aber Gelb benötigt auf jeden Fall die Spalten b oder f zum Gewinnen. In diagonaler Richtung ergibt sich die Möglichkeit, z.B. $\{a1, b2, c3, d4\}$, auf jeden Fall benötigt Gelb hierzu ein Feld aus b2 bis b6 oder f2 bis f6. Und in vertikaler Richtung ist natürlich immer etwas Möglich, jedoch für Rot leicht zu verhindern.
Stellt Rot diese Überlegungen an und zählt die verbleibenden Felder kommt er darauf das sich die Situation aus Diagramm I.2.3 ergibt Gelb also gezwungen ist b2 oder f2 zu spielen, deshalb spielt Rot a1. Das Spiel ist also vorbei Gelb verliert.

Wir sehen das Spiel kann bei guten Spielern bereits nach nur sechs Runden entschieden sein, aber wo war der Fehler? Wie wir oben gesehen haben ist es schwer den Spielbaum komplett zu untersuchen aber wir geben eine Möglichkeit an ein Einen Sieg in diesem Spiel zu erreichen. Gehen wir in Runde 4. Bis hierin wurde folgendes gespielt:
1. d1, d2
2. d3, e1
3. d4, e2
4. d5, d6

Und haben die Situation in Diagramm I.2.4

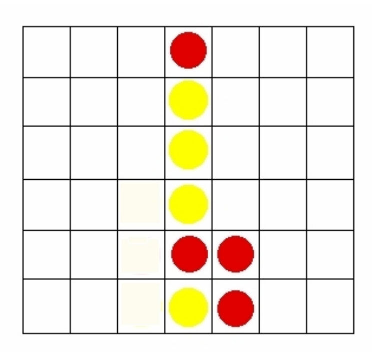


Abbildung 10: Diagramm I.2.3

Spielt Gelb nun a1 anstelle von c1 wäre ein Möglicher Spielverlauf: 1. d1, d2
2. d3, e1
3. d4, e2
4. d5, d6
5. a1, c1
6. c2, e3
7. e4, b1
8. a2, c3
9. c4, c5
10. e5, e6
11. c6, g1
12. g2, g3
13. g4, g5
13. g6, a3
14. a4, a5
15. a6, f1
16. f2, f3
17. f4, f5
18. f6, b2
Und Gelb gewinnt mit $\{a4, b3, c2, d2\}$. Also bereits in der 4 Runde wir der Grundstein über Sieg und Niederlage gelegt, voraus gesetzt der „menschliche“ Faktor, also Fehler, bleiben aussen vor. Zur Verdeutlichung zeigen wir nochmals die Situation in Runde 15 nachdem Gelb gespielt hat in Diagramm I.2.4.:

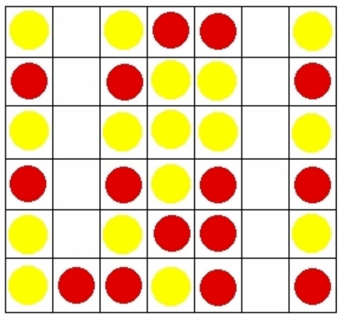


Abbildung 11: Diagramm I.2.4

Welche Erkenntnisse können wir also aus diesem Abschnitt ziehen?
Auch wenn es „nur eine“ Spielsituation ist hat man doch schon zwei wesentliche Dinge sehen können. Zum einen welche Rolle die Spalte b und f spielen. Es war hier zwar konstruiert, aber man erkennt trotzdem das es ohne diese beiden Spalten nicht Möglich ist einen Vierer in einer Diagonalen oder Horizontalen zu erreichen. Da es aber im Prinzip bei einem fehlerfreien Spiel nicht Möglich ist einen waagrechten Vierer zu schaffen, ohne den Zugzwang zu Nutzen, also den Gegner zu zwingen einen anderen Vierer zu verhindern, kann diese Möglichkeit ausgeschlossen werden. Der zu verhindernde Vierer wäre nämlich ein Horizontaler oder Diagonaler, was uns wieder in die Spalten b und f bringt.
Die Kontrolle oder den Nutzen dieser beider Spalten ist also der Schlüssel zum Gewinnen.

2.2.2 Gute und schlechte Gewinnmöglichkeiten

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass es an den letzten beiden Spalten hängt ob man gewinnt oder nicht, jetzt wollen wir untersuchen welche Felder in diesen Spalten zum Gewinn führen und welche also Gewinnmöglichkeiten also um diese Spalten herum geschaffen werden müssen um am Ende zu gewinnen.

Gewinnen kann man nur wenn der Gegner gezwungen ist einen Stein in das Feld unter dem eigenen Gewinnfeld zu werfen, und wir haben gesehen, dass wenn beide Spieler keine Fehler machen, es meisten dann passiert wenn alle bis auf die zwei Spalten bereits gefüllt sind, diese beiden aber leer. Welche Situation ergibt sich folglich. Der Gelb Spieler wird in diesem Fall immer die ungeraden Felder erhalten, der Rote die geraden.
Daraus lässt sich folgern das man nur der Spieler gewinnen kann, welcher seine Gewinnmöglichkeiten nach diesen Voraussetzungen geschaffen hat, ansonsten wird das Spiel unentschieden enden.

Sollten beide Spieler nach diesen Voraussetzungen gespielt haben, gibt es zwei Möglichkeiten, erstens befinden sich die Gewinnmöglichkeiten in der selben Spalte, bzw. sind diese in beiden Spalten in der gleiche Zeile, gewinnt diejenige, welche die niedriger Zeilenzahl hat, was für jeden klar sein sollte. Was aber wenn die Gewinnmöglichkeiten in verscheiden Spalten und verschiedenen Zeilen sind.
Um diesen Fall zu untersuchen greifen wir auf ein Beispiel zurück. Das Spiel sei bis zu der Situation in Diagramm I.2.5 vorgeschritten.:

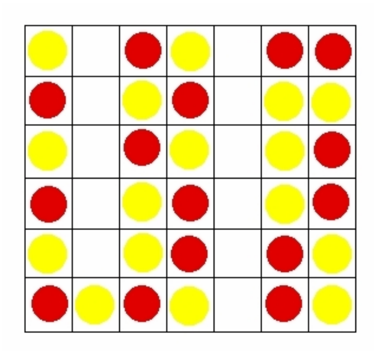


Abbildung 12: Diagramm I.2.5

Beide Spieler haben hier eine für sie gute Gewinnsituation geschaffen, Gelb mit b3, also ungerade, zum Vierer $\{a4, b3, c2, d1\}$ und Rot mit e2, also gerade, zum Vierer $\{c4, d3, e2, f1\}$. Da eine ungerade Anzahl an Steinen gespielt wurde, bzw. eine ungerade Zahl an Feldern frei ist, muss Rot als nächste werfen.(Den ersten Stein aus der aktuellen Runde haben wir schon gesetzt, da ein Wurf in die Spalte e für Gelb schon

zur Niederlage führen würde, er also gezwungen ist dort zu werfen) Welche Möglichkeiten ergeben sich für Rot? Er kann nur in b2 oder e1 werfen. Das Feld b2 bedeutet die sofortige Niederlage, e1 würde seine Gewinnmöglichkeit zerstören. Dennoch wird er das kleinere Übel wählen und e1 wählen. Daraufhin wird die Spalte e bis oben gefüllt und Rot ist wieder am Zug.
Es ergibt sich die Situation in Diagramm I.2.6.

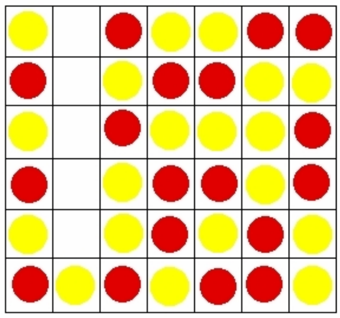


Abbildung 13: Diagramm I.2.6

Nun muss Rot das Feld b2 wählen, Gelb antwortet mit b3 und wird gewinnen.

Aus diesem Beispiel lässt sich folgendes ableiten. Ist eine Situation gegeben in der die Spieler jeweils für sich gute Gewinnmöglichkeiten geschaffen haben, also Gelb ungerade und Rot gerade, wird GElb immer dann gewinnen wenn diese in unterschiedlichen Spalten und Zeilen liegen. Aber warum?
Die Antwort ist ganze einfach, sind bis auf zwei Spalten alle gefüllt, darf Gelb immer beginnen und wird die ungeraden Felder haben, weshalb seine Gewinnmöglichkeit gut ist. Da die Gewinnmöglichkeit für Rot in einer anderen Spalte liegt, kann Gelb gefahrlos in der für ihn guten Spalte den ersten Stein werfen. Nun ist die Anzahl der freien Felder immer ungerade und Rot ist an der Reihe. Aber es bleibt ihm nur noch die andere Spalte übrig, da er sonst verlieren würde. Daraus folgt aber, dass im Prinzip nur noch eine gerade Anzahl von Feldern frei ist, nämlich 6 in dieser Spalte. Die zu erreichenden Felder drehen sich also in Bezug auf gerade/ungerade um, die gerade Möglichkeit wird nutzlos. Ist diese Spalte bis auf den vorletzten Platz gefüllt ist erneut nur noch eine gerade Anzahl übrig und Gelb ist an der Reihe, das Verhältnis dreht wieder und Rot muss den fatalen Stein ziehen.
Wir sehen das auch hier der Zugzwang eine besondere Rolle spielt und deshalb seine Kontrolle wichtig ist. Und auch wenn wir andere spricht in höheren Zeilen gelegene Möglichkeiten haben ist es die selbe Situation wie in unserem Beispiel, da es nur auf gerade und ungerade Felder ankommt.

Fassen wir nun die beiden letzten Abschnitte zusammen.
Bei fehlerfreiem Spiel führt der Gewinn nur über horizontale und diagonale Vierer, entweder direkt, weil es keine anderen Möglichkeiten mehr gibt, sprich alle bis auf zwei Reihen gefüllt sind, oder weil man über den Zugzwang eine Situation schafft in der der Gegner über eine horizontale oder diagonale Gewinnmöglichkeit verhindert,

dass man den vertikalen Vierer nicht blocken kann.
Dann haben wir gesehen, dass sollte beide Gewinnmöglichkeiten in der selben Spalte oder aber in der beiden Spalten die selben Felder sein, ist nur diejenige Gewinnmöglichkeit „gut“ welche in der Richtigen Zeile liegt, ungerade Zeile für Gelb, gerade für Rot. Es gewinnt dann jene mit der niedrigeren Zeilenzahl.
Es gibt also folgende Möglichkeiten:

1. Gelb hat eine ungerade Gewinnmöglichkeit, Rot eine gerade Gewinnmöglichkeit
   ⇒ Diejenige mit der kleiner Zeilenzahl gewinnt!

2. Gelb hat eine gerade Gewinnmöglichkeit, Rot eine ungerade Gewinnmöglichkeit
   ⇒ Das Spiel endet unentschieden!

3. Gelb hat eine ungerade Gewinnmöglichkeit, Rot eine gerade Gewinnmöglichkeit
   ⇒ Gelb gewinnt!

4. Gelb hat eine gerade Gewinnmöglichkeit, Rot eine gerade Gewinnmöglichkeit
   ⇒ Rot gewinnt!

Liegen die Gewinnmöglichkeiten in unterschiedlichen Spalten, ist die Sache etwas komplizierter, denn es gibt mehrere Möglichkeiten für die Spieler zu gewinnen. Nehmen wir an jeder Spieler hat genau eine Gewinnmöglichkeit in jeweils einer anderen Spalte und kann auch keine weitere schaffen. Man kann die folgenden aussagen treffen:

1. Gelb hat eine ungerade Gewinnmöglichkeit, Rot eine gerade Gewinnmöglichkeit
   ⇒ Gelb gewinnt! Wie oben gesehen.

2. Gelb hat eine gerade Gewinnmöglichkeit und Rot eine gerade Gewinnmöglichkeit
   ⇒ Rot Gewinnt! Rot kann die gerade Möglichkeit von Gelb verhindern, und selbst gewinnen, da Gelb nur die ungeraden Felder besetzten kann.

3. Gelb hat eine gerade Gewinnmöglichkeit, Rot hat ein ungerade Gewinnmöglichkeit
   ⇒ Das Spiel endet unentschieden! Es gelten die selben Voraussetzungen als wären die Möglichkeiten in einer Spalte, da erst die des anderen
   verhindert wird, bzw. man eher seine eigene aufgibt als den anderen gewinnen zu lassen.
   Sollte Rot seine Gewinnmöglichkeit nicht aufgeben, und in die andere Spalte werfen, dann tauschen bei Spieler
   gerade und ungerade Felder und Gelb gewinnt.

4. Gelb hat eine ungerade Gewinnmöglichkeit, Rot eine ungerade Gewinnmöglichkeit
   ⇒ Das endet unentschieden, wenn Die Gewinnmöglichkeit nicht in der ersten Zeile ist.
   Gelb beginnt, da es eine gerade Anzahl von freien Feldern gibt, und spielt in eine freie Spalte worauf Rot die
   andere wählen wird. Nun wird zunächst Gelb seine Möglichkeit aufgeben und die Spalte wird gefüllt. Im Anschluß

bleibt eine ungerade Zahl an freien Feldern und Rot ist an der Reihe, woraufhin er auch seine Möglichkeit
aufgeben muss.

Natürlich haben wir hier ganz speziell Situationen betrachte und Ergebnisse bekommen.Man kann diese, indem man an einer Stelle einen anderen Zug macht, ganz einfach ausser Kraft setzen, was wir im Beispiel in Diagramm I.2.7 zeigen wollen.

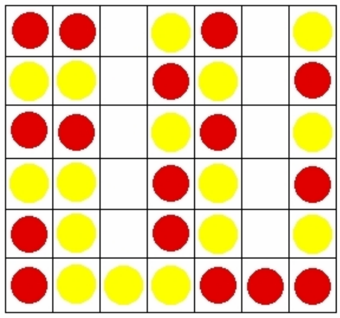


Abbildung 14: Diagramm I.2.7

Wir befinden uns scheinbar in der Situation das beide Spieler eine ungerade Gewinnmöglichkeit in unterschiedlichen Spalten haben, folglich sollte das Spiel unentschieden enden. Aber wenn man nach obiger Regel weiter spielt erkennt man das Rot sich eine weitere Möglichkeit zu gewinnen schaffen kann, und zwar in einem geraden Feld wie man in Diagramm I.2.8 sehen kann, und deshalb die obigen Überlegungen hinfällig sind. Das Spiel endet mit Sieg für Rot.

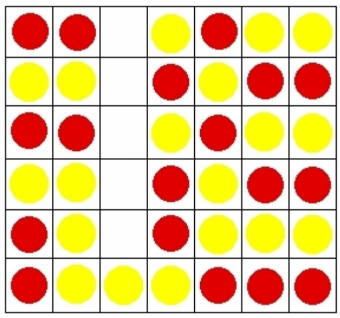


Abbildung 15: Diagramm I.2.8

Aber und darauf kam es uns ja in diesem Abschnitt an, wir können verschiedenen Situationen bestimmten Nutzen zuordnen, auch ohne das ganze Spiel zu kennen.
Wir können prinzipiell abschätzen welche Gewinnmöglichkeiten besser sind, und welche Möglichkeiten für den Gegner es von vorne herein zu verhindern gilt.
Daraus folgt auch was jeder Spieler wahrscheinlich intuitiv macht und was wir bei jedem Beispiel hier auch getan haben, und zwar immer mit d1 zu beginnen. Wir halten

und somit nämlich immer die Möglichkeit offen eine Gewinnmöglichkeit in der ersten Zeile waagrecht zu haben. Wir machen dies, da wir gesehen haben das es nur über die waagrechten und diagonalen Vierer Gewinnchancen gibt, dazu aber immer die Spalte d benötigt wird, und wir ungerade Möglichkeiten brauchen, also uns die Möglichkeit eines Vierers in der ersten Zeile halte.
Umgekehrt sollte man als roter Spieler immer Gewinnmöglichkeiten für Gelb in der ersten Zeile verhindern da dies die stärksten sind.

2.2.3 Zugzwang und dessen Kontrolle

Wir haben im letzten Abschnitt immer wieder Situationen erzeugt in denen ein Spieler gewinnt und dabei stillschweigend das Phänomen des „Zugzwangs" hingenommen, ohne näher darauf einzugehen.
Dies hat den Grund, dass es ohne den Zugzwang nicht möglich ist zu Gewinnen, wie wir gesehen haben, und deshalb wollen wir diesem Thema einen eigenen Abschnitt widmen.

Zunächst einmal was bedeutet Zugzwang.
Damit beschreiben wir eine Situation in der ein Spieler sozusagen gezwungen ist einen bestimmten Zug zu tätigen, sei es weil kein anderes Feld gespielt werden kann wie in Diagramm I.2.3, oder weil er eine Niederlage abwenden muss, indem er eine Vierermöglichkeit verhindert, wie in Diagramm I.2.9 wo Rot nur b1 oder e1 spielen kann um einen möglichen Vierer von Gelb zu verhindern.

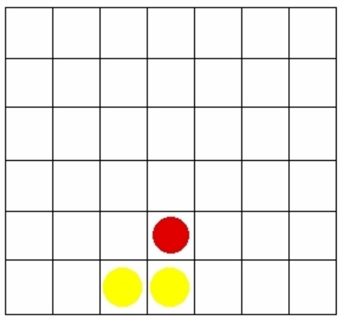


Abbildung 16: Diagramm I.2.9

Mit Hilfe des Zugzwangs lässt sich also spätestens nach 15. Runden eine Gewinnsituation schaffen. Aber wem wir dieser am Ende Nutzen? Wer kontrolliert also den Zugzwang?

Zunächst wollen wir sehen was es bedeutet den zugzwang zu kontrollieren und gehen dazu nochmals zu unserem Beispiel aus I.2.2.1. Wir haben gesehen, das nach der fünften Runde das Spiel schon entschieden ist. Aber warum genau?
In allen Runden danach besetzt Gelb nach und nach die ungeraden Felder und Rot

wird immer in die selbe Spalte Spielen, so ergibt sich für Gelb keine Gewinnmöglichkeit und am Ende wird Gelb entweder b1 oder f1 spielen müssen. Rot kontrolliert also den Zuzwang, da Gelb keine Möglichkeit hat die geraden Felder zu spielen. Dies resultiert daraus, das noch eine gerade Anzahl an Feldern übrig ist die nicht zu einem Sieg von Rot führen würden, folglich am Ende die Situation aus Diagramm I.2.3 übrig bleibt.
Wir können also dann von Kontrolle des Zugzwngs sprechen, wenn ein Spieler die Möglichkeit hat durch eine Strategie, z.B. immer die selbe Spalte zu Spielen wie der andere, alle möglichen Gewinnpositionen zu verhindern, so dass er am Ende seine spielen kann.

Wie kann man also die Kontrolle über den Zugzwang erhalten, und ist Möglich die Kontrolle vom anderen übernehmen?
Wie ist die Situation zu Beginn des Spiels. Intuitiv kann man denken das Rot natürlich auch hier die Möglichkeit hat immer in die selbe Spalte zu spielen, es würde ihm aber nichts nützen, da Gelb dann in der ersten Zeile einen Vierer bekommt. Wir legen also fest, dass am Anfang kein Zugzwang existiert.
Wie können wir ihn aber schaffen?
Es hängt sicher davon ab welche Gewinnsitiation man schaffen kann. Gelb muss nach obigen Überlegungen eine Gewinnmöglichkeit in einem ungeraden Feld schaffen, und zugleich verhindern, dass Rot eine gerade Gewinnposition in der gleichen Spalte aber in einer kleineren Zeile schafft. Idealer Weise also für Gelb in ersten oder dritten Zeile, und Rot nicht in der Zweiten, und natürlich auch keinen anderen davor.

2.3 Vorige Überlegungen und der Spielbaum

Nun wollen wir mit den nun erworbenen Erkenntnissen versuchen den Spielbaum zu vereinfachen um das Spiel wenigstens im Ansatz mit Hilfe der Spieltheorie zu untersuchen.
Natürlich werden wir auch so nicht den ganzen Spielbaum analysieren können, aber wir schaffen eine gewisse Spieltiefe, also wir betrachte hier 6 Steine und wollen so versuchen den bestmöglichst eine Strategie hierfür zu zeigen.
Wir gehen davon aus das die Spieler immer Positionen erreichen wollen die zu möglichen Vierern gehören oder aber die ihnen die Möglichkeit geben in einem folgenden Zug eine Viererposition zu erreichen.
Zunächst können wir im ersten Zug annehmen, dass Gelb immer d1 wählen wird, wir verkürzen ihn also von oben. Damit folgt dann folgender Spielbaum:

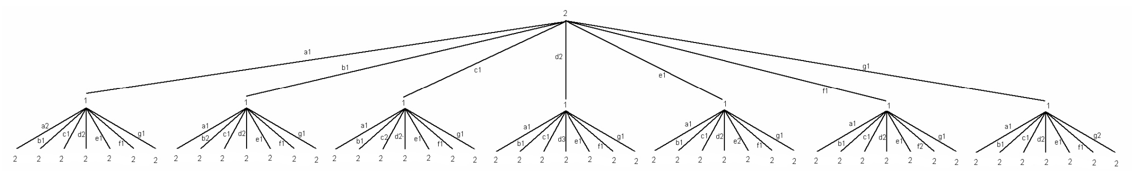


Abbildung 17: Diagramm I.2.10

Nun überlegen wir uns welche Gewinnmöglichkeiten für Gelb denn überhaupt Sinnvoll sind, also welche sind mit dem letzten Stein in ungeraden Feldern in den Zeilen 1 und 3 zu vervollständigen. Nutzen wir zusätzlich noch aus, dass wir alle Ergebnisse in den Spalten a bis e Spiegel oder verschieben können ergeben sich die folgenden.
$\{a1, b1, c1, d1\}, \{a3, b3, c3, e3\}, \{a1, b2, c3, d4\}$,
Für den roten Spieler ist es am besten gerade Gewinnmöglichkeiten zu schaffen, und zwar in der zweiten Zeile. Daraus ergeb sich die folgenden Vierer:
$\{a2, b2, c2, d2\}, \{a1, b2, c3, d4\}$ dies sind bis auf Spiegeln und verschieben die einzigen Vierer in den unteren vier Zeilen, $\{d4, c3, b2, d1\}$ fällt weg da Gelb als erstes d1 spielt.
Welche Möglichkeiten ergeben sich daraus für Rot. Er wird möglichst schon im ersten Zug verhindern wollen, dass Gelb ein weiteres wichtiges Feld besetzt, also eines der obigen Viererfelder. Das einzige an das er herankommt ist aber a1. Das Spielen dort ist aber nicht hinderlich für Gelb, da er gespiegelt auch g1 spielen kann. Also wird Rot ein für sich wichtiges Feld besetzen hier also d2 oder vorbereitende für den nächsten Zug e1. Für Gelb spielt das keine Rolle er wird in der zweiten Runde a1 spielen um ein weiteres Viererfeld zu bekommen. Rot wird entweder mit versuchen die Tupel $\{e1, e2\}, \{e1, d2\}\{g1, e1\}, \{g1, d2\}$ zu bekommen Es ergeben sich also folgende Zug Möglichkeiten und und unter weglassen der Äste der Baum aus Diagramm I.2.11.

1. d1, $\{e1, d2, g1\}$
2. a1, $\{e2, d2, g2\}$

Welche Möglichkeiten sind nun wieder die besten für Rot?
Im linken Ast hat er zwei Möglichkeiten, entweder er behindert Gelb mit a2, c1 oder er versucht seine Gewinnmöglichkeit aufzubauen indem er e1 spielt. Wir haben hier also folgende Möglichkeiten:

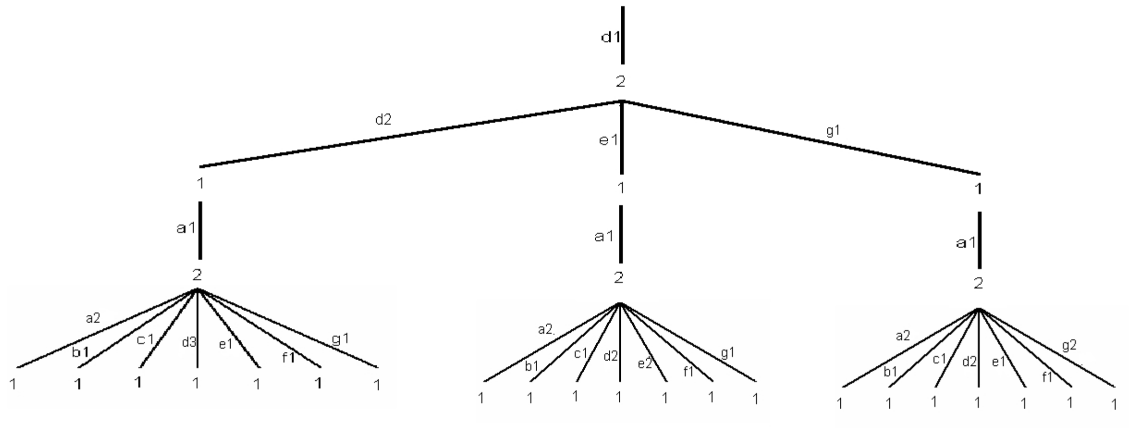


Abbildung 18: Diagramm I.2.10

1. d1, d2
2. a1, $\{e1, a2, c1\}$
Im Mittleren Ast hat Rot wieder die Möglichkeit Gelb zu behindern, mit a2, c1, oder selbst seine Gewinnmöglichkeit weiter aufzubauen mit e2, oder d2. Das ergibt folgende Züge:

1. d1, e1
2. a1, $\{a2, c1, d2, e2\}$
Im rechten Ast sehen wir, dass es für den zweiten Spieler eigentlich nicht gut war g1 zu spielen, da Gelb mit a1 geantwortet hat und er zwar versuchen könnte den Vierer $\{d2, e2, f2, g2\}$ zu erreichen, aber wir haben gesehen, dass er trotzdem verlieren würde, schafft es Gelb auf der anderen Seite eine der obigen Möglichkeiten aufzubauen. Diesen Ast verfolgen wir also nicht mehr weiter, konnten also in der ersten Runde g1 schon als Zug mit geringerem Nutzen identifizieren. Es ergibt sich der Baum im Diagramm I.2.11:

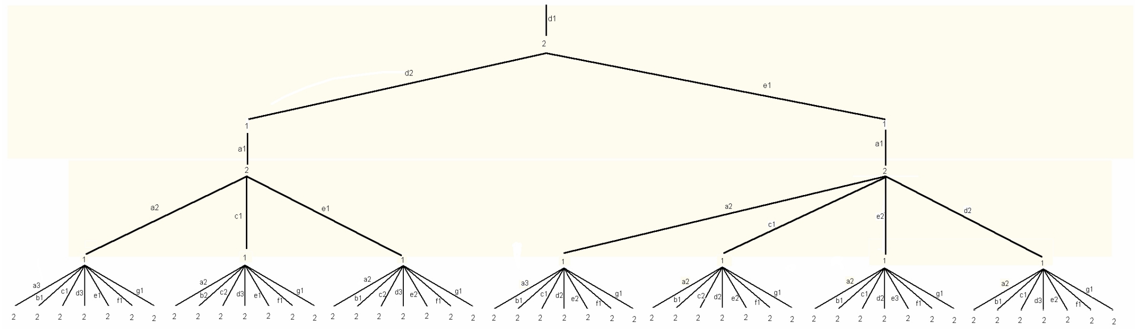


Abbildung 19: Diagramm I.2.11

Betrachten wir die nächste Runde.

Wir beginnen auch hier beim Linken Ast, also der Historie $\{d1, d2, a1, a2\}$.
Welche Möglichkeiten hat Gelb?
Positionen seiner Vierer wären b1, c1, a3 und d3, also wird er eine von ihnen Spielen.
Rot kann kann bzw. darauf antworten mit c1,b1,e1,a3 oder d4.

Im nächsten Ast $\{d1, d2, a1, c1\}$ ist für Gelb nützlich d3 oder c2 zu spielen, Rot kann a2, c2, c3, e1, oder d4 spielen jeweils abhängig von der Wahl von Gelb.
Und im dritten Ast $\{d1, d2, a1, e1\}$ kann Gelb a2, b1, c1 oder d3 und Rot muss bzw. kann mit b1,c1, a2 oder e2 antworten.
Im Ast $\{d1, e1, a1, a2\}$ Im Ast $\{d1, e1, a1, c1\}$ Im Ast $\{d1, e1, a1, e2\}$ Im Ast $\{d1, e1, a1, d2\}$
Es ergibt sich der vereinfachte Spielbaum in Diagramm I.2.12 mit nun nur noch 60 Enden.

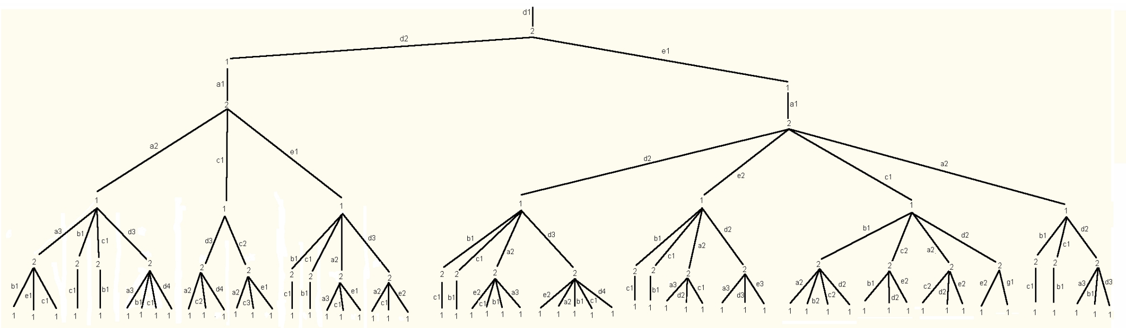


Abbildung 20: Diagramm I.2.12

Wir haben hier natürlich sehr viele intuitive Verhaltensweisen vorausgesetzt, aber immer im Hinterkopf die Ergebnisse aus Abschnitt I.2.2 gehabt. Dies ist in unseren Augen eine vertretbare Vereinfachung, und wir können nun indem wir verschiedenen Positionen einen Wert geben, in den ersten 6 Zügen durchaus so etwas wie eine „beste“ Strategie finden.

Betrachten wir die Historien die bis zum 6. Zug entstanden sind, und bezeichnen ihre Menge mit H_6.

$H_6 = \{d1, d2, a1, a2, a3, b1\}, \{d1, d2, a1, a2, a3, c1\}, \{d1, d2, a1, a2, a3, e1\}, \{d1, d2, a1, a2, b1, c1\},$
$\{d1, d2, a1, a2, c1, b1\}, \{d1, d2, a1, a2, d3, a3\}, \{d1, d2, a1, a2, d3, b1\}.\{d1, d2, a1, a2, d3, c1\},$
$\{d1, d2, a1, a2, d3, d4\}, \{d1, d2, a1, c1, d3, a2\}, \{d1, d2, a1, c1, d3, c2\}, \{d1, d2, a1, c1, d3, d4\},$
$\{d1, d2, a1, c1, c2, a2\}, \{d1, d2, a1, c1, c2, c3\}, \{d1, d2, a1, c1, c2, e1\}, \{d1, d2, a1, e1, b1, c1\},$
$\{d1, d2, a1, e1, c1, d1\}, \{d1, d2, a1, e1, a2, a3\}, \{d1, d2, a1, e1, a2, c1\}, \{d1, d2, a1, e1, a2, e2\},$
$\{d1, d2, a1, e1, d3, a2\}, \{d1, d2, a1, e1, d3, c1\}, \{d1, d2, a1, e1, d3, e2\}, \{d1, e1, a1, d2, b1, c1\},$
$\{d1, e1, a1, d2, c1, b1\}, \{d1, e1, a1, d2, a2, e2\}, \{d1, e1, a1, d2, a2, a3\}, \{d1, e1, a1, d2, a2, d3\},$
$\{d1, e1, a1, d2, a2, c1\}, \{d1, e1, a1, d2, d3, e2\}, \{d1, e1, a1, d2, d3, a2\}, \{d1, e1, a1, d2, d3, b1\},$
$\{d1, e1, a1, d2, d3, c1\}, \{d1, e1, a1, d2, d3, d4\}, \{d1, e1, a1, e2, b1, c1\}, \{d1, e1, a1, e2, c1, b1\},$
$\{d1, e1, a1, e2, a2, a3\}, \{d1, e1, a1, e2, a2, d2\}, \{d1, e1, a1, e2, a2, c1\}, \{d1, e1, a1, e2, d2, a3\},$
$\{d1, e1, a1, e2, d2, d3\}, \{d1, e1, a1, e2, d2, e3\}, \{d1, e1, a1, c1, b1, a2\}, \{d1, e1, a1, c1, b1, b2\},$
$\{d1, e1, a1, c1, b1, c2\}, \{d1, e1, a1, c1, b1, d2\}, \{d1, e1, a1, c1, c2, b1\}, \{d1, e1, a1, c1, b2, d2\},$
$\{d1, e1, a1, c1, b2, e2\}, \{d1, e1, a1, c1, a2, c2\}, \{d1, e1, a1, c1, a2, d2\}, \{d1, e1, a1, c1, a2, e2\},$

$\{d1, e1, a1, c1, d2, e2\}, \{d1, e1, a1, c1, d2, g1\}, \{d1, e1, a1, a2, b1, c1\}, \{d1, e1, a1, a2, c1, b1\}$,
$\{d1, e1, a1, a2, d2, a3\}, \{d1, e1, a1, a2, d2, b1\}, \{d1, e1, a1, a2, d2, d3\}$

Geben wir uns nun folgende Nutzenfunktion vor, welche hier rein willkürlich ist aber verdeutlicht wie man vorgehen könnte.
$u : H_6 \to \mathbb{R}^2$ mit
$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \mapsto (\sum 2 \cdot 1_{\{Ein\ Viererfeld\ ist\ besetzt\}}(x_i) + 1 \cdot 1_{\{Ein\ gegnerisches\ Vierfeld\ ist\ besetzt\}}(x_i) + 0$
$\sum [2 \cdot 1_{\{Ein\ Viererfeld\ ist\ besetzt\}}(y_i) + 1 \cdot 1_{\{Ein\ gegnerisches\ Vierfeld\ ist\ besetzt\}}(y_i) + 0 \cdot 1_{\{EinsonstigesFeld\ ist\ beset}$

Dann ergibt sich der Nutzen aus den einzelnen Ästen wie in Diagramm I.2.13, wobei wir die rechten Äste weggelassen haben, da Rot mit e1 keinen Nutzen bekommt, und so über 4 nicht hinaus kommt.:

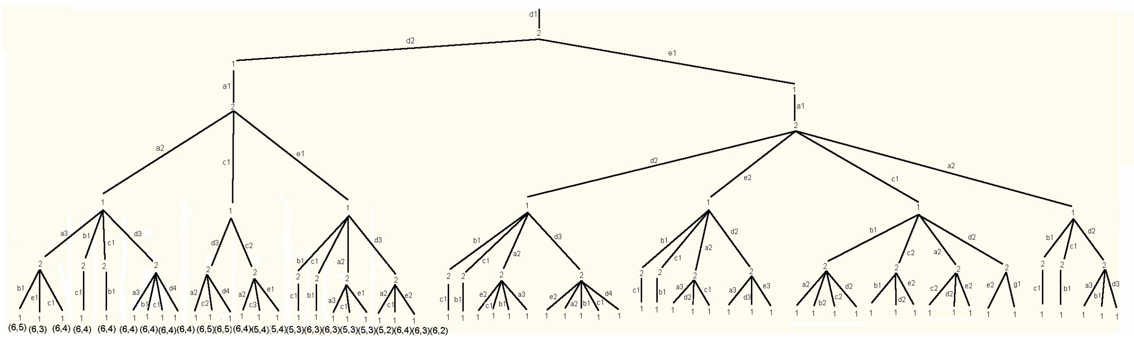


Abbildung 21: Diagramm I.2.13

Mit obigen Annahmen wird das Spiel also auf einen Ast mit der Verteilung (6,5) hinauslaufen, wobei wenn wir die Äste verfolgen hier die folgenden Historien in Frage kommen:
$\{d1, d2, a1, a2, a3, b1\}, \{d1, d2, a1, c1, d3, a2\}, \{d1, d2, a1, c1, d3, c2\}$
Weitere Aussagen lassen sich mit dieser Spieltiefe natürlich nicht machen, weshalb wir etwaige besser Züge nicht ausschließen können, ebenso wenig wie man sagen kann das ist die bester oder einzige Eröffnungsvariante für Vier Gewinnt.
Eine mögliche Position nach diesen sechs Zügen könnte z.B. so aussehen wie in Diagramm I.2.14, hier haben wir die Historie $\{d1, d2, a1, a2, a3, b1\}$ gewählt.

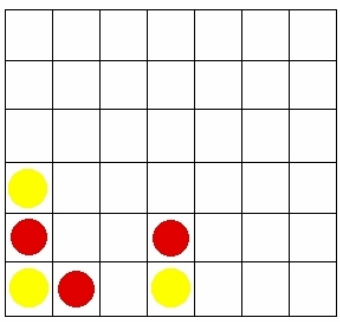


Abbildung 22: Diagramm I.2.14

Es handelt sich hier um eine starke Vereinfachung aber wir sehen wie man es schaffen

kann das Spiel zu analysieren.
Genau auf solchen Annahmen basieren die meisten Computerspiele zu Vier Gewinnt, man betrachtet nur eine gewisse Tiefe, und vergibt jedem Feld einen Nutzen. Natürlich sind die Einschränkungen nicht so gravieren wie hier beim von der Hand bearbeiten aber es soll ja auch nur ein Versuch sein das Spiel in den Griff zu bekommen.

Wie man es mit dem Computer bearbeiten kann, und welche Lösung gut ist, aber auch wo die Grenzen sind behandeln wir in Teil II dieser Arbeit.

Teil II
Programmierung „4 Gewinnt“

3 Ziel der Programmierung einer Künstlichen Intelligenz

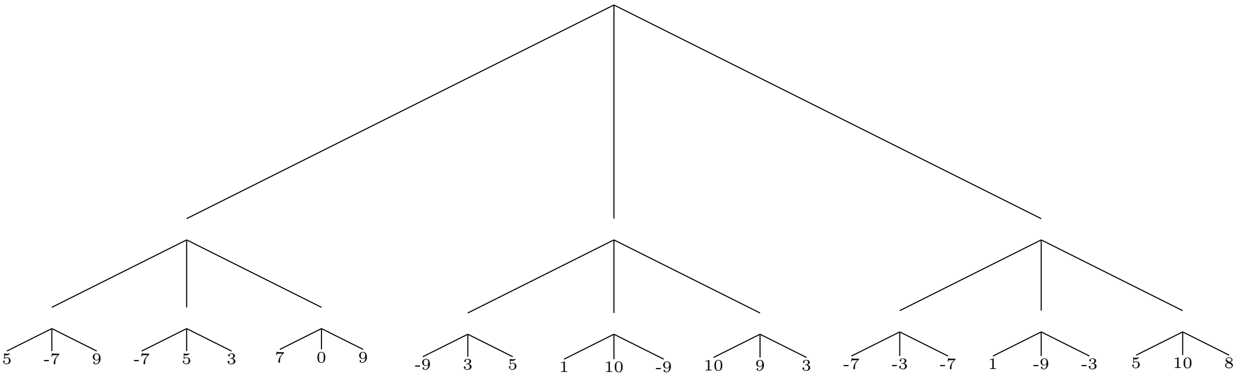
Als Ziel haben wir es uns gesetzt eine künstliche Intelligenz (KI) zu programmieren, die es ermöglicht gegen einen Computer zu spielen. Die KI sollte dabei so angelegt sein, dass sie im Schwierigkeitsgrad angepasst werden kann, allerdings auch ein ernst zunehmender Gegner für den menschlichen Spieler ist. Da das Spiel wie bereits dargelegt gelöst ist und für den beginnenden Spieler zu gewinnen, wäre es “langweilig“, wenn der Computer perfekt wäre, da ein Spiel gegen ihn dadurch an Reiz verliert, wenn man sich bewusst ist, nur verlieren zu können. Aus diesem Grunde soll er unterschiedlich “klug“ eingestellt werden können.

4 MinMax Algorithmus

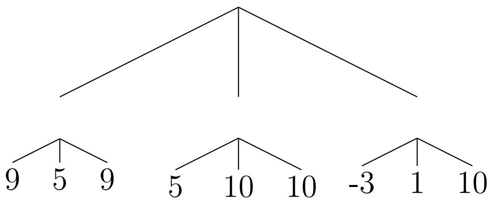
Für symmetrische Spiele in extensiver Form ist eine Bestimmung von optimalen Strategien durch Elimination durch strikte Dominanz möglich. Auf diesem Prinzip gründet sich der MinMax Algorithmus.

4.1 Funktionsweise

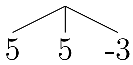
Im Folgenden sei also nun für Spieler 1 die Nutzenfunktion besser je größer ihr Wert ist, für Spieler 2 daraus folgernd je kleiner ihr Wert ist. Wobei im Moment nur die Möglichkeiten -1 Für Sieg von Spieler 2, 0 für ein Unentschieden sowie +1 für einen Sieg von Spieler 1 gegeben ist.
Der Ausgang eines Spielfeldes lässt sich bestimmen indem der Spielbaum unterhalb der Aktuellen Situation aufgestellt wird und nun von unten nach oben die Bewertungen wie Eliminiert werden. Ist An einem Teilbaum der Tiefe 1 also nun Spieler 1 am Zug so wird er die Beste Möglichkeit für sich wählen. Man kann also dem Knoten über der Entscheidung den Wert dieser Besten Möglichkeit zuordnen und den Teilbaum eliminieren. Für Spieler 2 ist diese Elimination mit dem geringsten wert analog.
Zum veranschaulichen dieses Algorithmus sei ein Spiel $S' = (M, E \cap Z, P, u)$ gegen durch abwechselndes ziehen von Spieler 1 und Spieler 2 gegeben sowie durch folgenden Spielbaum:



In den Untersten Teilbäumen wäre Spieler 1 am Zug es wird also aus den Teilbäumen je das Maximum für den Wert des Knotens darüber gewählt: es ergibt sich der daraus resultierende Baum:



Im nächsten Schritt ergibt sich nun:



Sowie letztendlich:

5

Durch Iterierung dieser Schritte kann letztendlich der Wert des aktuellen Spielfeldes Ermittelt werden. Ein Sieg, Unentschieden oder eine Niederlage ist also vorbestimmt für einen Spieler. Aufgrund von begrenzter Rechenzeit ist dies Allerdings nicht möglich. Je mehr Züge noch verbleiben (also je Tiefer der Baum) desto länger dauert die Berechnung. Bei "4-Gewinnt" hat ein Spieler bis zu 7 Strategien pro Zug, bei einer Vergrößerung der Baumtiefe um 1, multipliziert sich,im schlimmsten Falle,die Rechenzeit also um den Faktor 7.
Ein einfacher Weg die Rechenzeit zu begrenzen ist die sogenannte Suchtiefe zu verringern. Wir erlauben also nur eine bestimmte Baumtiefe t.
Bisher haben wir "4-Gewinnt" als Spiel in extensiver Form betrachtet:

$$S = (M = \{1, 2\}, H = E \cap Z, P : E \to M, u : Z \to \mathbb{R})$$

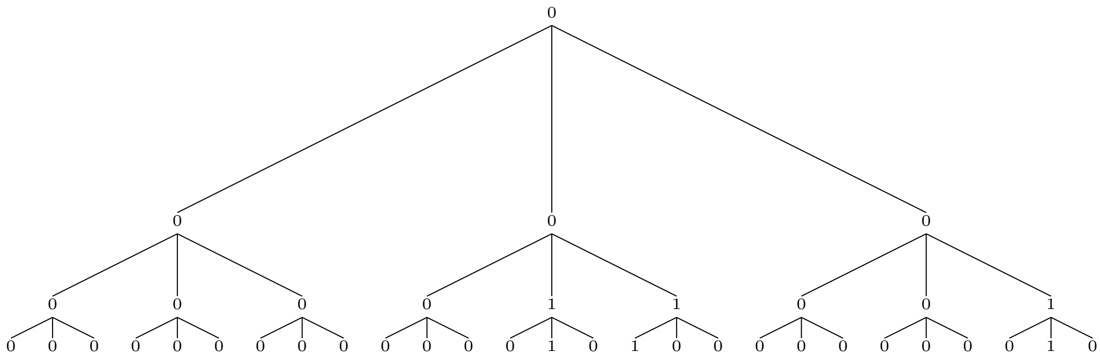
Um nun den MinMax Algorithmus nur mit einer vorgegebenen maximalen Tiefe arbeiten zu lassen erweitern wir nun also die Nutzenfunktion u von Z auf ganz H, indem wir allen Werten von E ein unentschieden zuordnen, also

$$u(h) = 0 \forall h \in E$$

Durch die begrenzte Tiefensuche kann nun Rechenzeit gespart werden und gleichzeitig ergibt sich der "positive" Nebeneffekt dass die Entscheidung dadurch verfälscht wird. Positiv ist das deswegen, da wir ja einen nicht perfekt spielenden Computer erschaffen wollten um der Langeweile vorzubeugen.

4.2 Problematiken

Durch diese simple Erweiterungen der Nutzenfunktion u bleiben allerdings noch einige Probleme. Der Computer kann erst ab einer ziemlich hohen Tiefe Entscheidungen Treffen die gut nachvollziehbar sind, würde er z.b. $t = 4$ wählen, wirken sich nur mögliche Siege oder Niederlagen innerhalb der nächsten 4 Züge auf seine Entscheidungen aus. Dabei werden sogar mögliche Siege sehr wahrscheinlich eliminiert. Ein Beispiel dafür bildet das Spiel S'', es ist eine Vereinfachung von S' von oben wobei die Nutzenfunktion u derart abgeändert wurde, dass nur noch die werte $-1, 0, 1$ angenommen werden, dabei wird ± 1 angenommen wenn die Nutzenfunktion von S' ± 10 war, sonst 0.
Dies ist der Baum des Spiels mit bereits eingetragener MinMax-Elimination:



In dem Beispiel könnte Spieler 1 nun beliebig wählen, jede seiner Möglichkeiten wäre gleich gut.
Dieses Beispiel zeigt, dass der Algorithmus bei einer Simplen Erweiterung der Gewinn/Verlust/Unentschieden Nutzenfunktion sehr ineffizient ist.
Außerdem wäre eine Verringerung der Rechenzeit noch sehr interessant, also eine Verringerung der Auszuwertenden Endpositionen.

5 Alpha-Beta Cut

Eine weiter Verfeinerung des MinMax Algorithmus ist der Alpha-Beta-Cut-MinMax oder kurz Alpha-Beta-Cut.
Er gründet sich auf der Annahme dass jeder Spieler ein Sicherheitsniveau hat, das er immer erreicht. Dass Spieler 1 also nur Ergebnisse erreichen kann die unterhalb vom Sicherheitsniveau von Spieler 2 (Beta=β) sind, sowie Spieler 2 nur Ergebnisse Erreichen kann die oberhalb vom Sicherheitsniveau von Spieler 1(Alpha=α) sind. Fallen Ergebnisse aus dem Intervall von $[\alpha, \beta]$ so kann auf weitere Überprüfung vernachlässigt werden. Um ein Solches Intervall überhaupt zu erreichen und um die Bekannten Probleme der Nutzenfunktion beim MinMax Algorithmus zu umgehen ist es hier allerdings auch nötig die Nutzenfunktion zu verfeinern.

5.1 Verfeinerung der Nutzenfunktion

Die Verfeinerung der Nutzenfunktion basiert nun auf grundlegenden Verhaltensmustern die wir bereits als Optimal dargestellt haben im ersten Teil.
Wir bewerten nun jedes Spielfeld aus der Historie wie folgt:
Ziel des Spieles ist es eine Reihe aus 4 eigenen Steinen aufzubauen. Für diese Reihe gibt es nur eine Begrenzte Anzahl von Möglichkeiten (69 Blöcke). Wir bewerten nun alle diese Möglichkeiten und geben ihren Anteil an die Nutzenfunktion wieder. Ist ein Block besetzt mit einem Stein von Spieler 1 so erhält gibt der Block einen Anteil von 10 an die Nutzenfunktion, Ist ein Block besetzt mit 2 Steinen von Spieler 1 so gibt er einen Anteil von 100 an die Nutzenfunktion. Bei 3 Steinen ist der Anteil 10.000.
Hat ein Block 4 Steine so ist das Spiel gewonnen und der Anteil ist 100000000. Die Anteile für Steine von Spieler 2 sind jeweils negativ. Des weiteren kann ein Block keinen Anteil liefern wenn schon Steine von beiden Spielern in ihm liegen.
Diese Werte können natürlich variiert werden.
Der Wert für einen Vierer sollte sehr groß gewählt werden, damit ein Sieg unbedingt das Erstrebenswerte bleibt, es darf also nicht möglich sein mit Ansammlung von anderen Möglichkeiten mehr Punkte zu machen als mit dem eigentlichen Gewinn des Spiels. Die Verfeinerung der Nutzenfunktion soll also nicht die Gewinnsituationen verändern.
Mit dieser einfachen Nutzenfunktionsverfeinerung ist nun schon eine bessere Unterscheidung der Spielmöglichkeiten gegeben, auch wenn noch kein Sieg innerhalb der Tiefe der Suche auftritt.
Weitere Verfeinerungen wären möglich für bekannt "gute Positionen", wie zum Beispiel Zwickmühlen bei denen bereits 2 Dreier existieren, deren offenes Feld (mögliches Gewin Eine andere mögliche Veränderung wäre es Dreier nach der Höhe zu bewerten, usw.

5.2 Beschreibung des Alpha-Beta Cuts in Pseudocode

Zur vorherigen Erklärung sollen zuerst einige Konventionen für den Pseudocode erläutert werden.
Allgemein ist die Syntax vollkommen frei, er muss nur vom Menschen verstanden werden. Eine Funktion wird aufgerufen auf dem Aktuellen Spielfeld bzw. der aktuellen Position im Spielbaum.
Mit $S = \{s_1, \ldots s_k\}$ soll die Menge der Wahlmöglichkeiten an auf dem Aktuellen Spielfeld bezeichnet werden (endlich und insbesondere abzählbar).
Außerdem soll für ein $s \in S$ $s.\text{funktion}$ definiert werden. es Bezeichnet die Funktion Aufgerufen auf eine Simulation von s.
Zuerst soll allerdings noch die Funktion $\max(n) und \min(n)$ definiert werden. Sie sind, wie danach die Funktionen $\text{abmin}, \text{abmax}$ (für Alpha-Beta) rekursiv definiert:
$\max(0) = \min(0) = \text{wert}()$
$\max(n) = \max\{s.\min(n-1) | s \in S\}$
$\max(n) = \min\{s.\max(n-1) | s \in S\}$

Pseudocode $\text{abmax}(n, \alpha, \beta) =$

$\text{if}(n = 0)\,\text{return}\,\text{wert}()$
$i := 1;$
$\text{while}(i <= n)\{$
$w := s_i.\,\text{abmin}(n-1, \alpha, \beta);$
$\text{if}(w >= \beta) \quad \text{return}\,\beta;$ Bedingter Befehl 1
$\text{if}(w > \alpha) \quad \alpha := w;$ Bedingter Befehl 2
$i++;$
$\}$
$\text{return}\,\alpha;$

Analog ist definiert:

Pseudocode $\text{abmin}(n, \alpha, \beta) =$

$\text{if}(n = 0)\,\text{return}\,\text{wert}()$
$i := 1;$
$\text{while}(i <= n)\{$
$w := s_i.\,\text{abmax}(n-1, \alpha, \beta);$
$\text{if}(w <= \alpha) \quad \text{return}\,\alpha;$ Bedingter Befehl 1
$\text{if}(w < \beta) \quad \beta := w;$ Bedingter Befehl 2
$i++;$
$\}$
$\text{return}\,\beta;$

5.3 Korrektheit des Algorithmus

Mit der Definition wird nun ein Algorithmus gegeben der effizienter rechnen kann, da einige Rechenschritte wegfallen, wenn der Bedingte Befehl 1 ausgeführt wird also ein Cut ausgeführt wird.
Diese Vorgehensweise ist also nur von Nutzen, wenn unter gewissen Voraussetzungen die Werte der Funktionen abmin und abmax mit den klassischen min und max übereinstimmen.
Hierzu erst ein Lemma über den Wert von abmin und abmax

5.3.1 Lemma

Sei $n \geq 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta \Rightarrow$

$$\text{abmax}(n, \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha & \text{für } \max(n) \leq \alpha \\ \max(n) & \text{für } \alpha \leq \max(n) \leq \beta \\ \beta & \text{für } \beta \leq \max(n) \end{cases}$$

$$\text{abmin}(n, \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha & \text{für } \min(n) \leq \alpha \\ \min(n) & \text{für } \alpha \leq \min(n) \leq \beta \\ \beta & \text{für } \beta \leq \min(n) \end{cases}$$

Beweis: Das Lemma soll bewiesen werden durch Induktion nach n. Dabei werden aufgrund der Symmetrie nur die Schritte für die Maximumsfunktion dargelegt. Der Induktionsanfang ist gegeben per Definition von Max(0) die ebenfalls den

Wert des Aktuellen Spielfeldes darstellt.
Sei nun also die Aussage gegeben für $\leq n$

1. $\underline{\max(n) \geq \beta}$ Es gilt $\max(n) = \max\{s.\min(n-1) | s \in S\}$ Sei nun also $1 \leq l \leq k, l$ minimal mit $s_l.\min(n-1) = \max(n)$
   Nun ist $s_l.min(n-1) \geq \beta \Rightarrow s_l.\text{abmin}(n-1,\alpha,\beta) = \beta \forall \alpha$
   Bei der Überprüfung von l-ten Schritt der Schleife ist also $w = s_l.\text{abmin}(n-1,\alpha,\beta) = \beta$ und es wird β als Wert für $\text{abmax}(n,\alpha,\beta)$ zurückgegeben.
2. $\underline{\max(n) < \alpha}$ $\max(n) = \max\{s.\min(n-1) | s \in S\}$
   $\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq k : s_i.\min(n-1) < \alpha (\leq \beta)$
   $\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq k : s_i.\text{abmin}(n-1) \overset{I.V.}{=} \alpha = w \not> \alpha$
   $\Rightarrow$Keiner der Bedingten Befehle wird ausgeführt.
   $\Rightarrow \alpha$ wird unverändert am Ende zurückgegeben.

<u>sonst</u> Es gilt: $\alpha \leq \max(n) < \beta$
$\forall 1 \leq i \leq k : s_i.\min(n-1) < \beta$
Sei $1 \leq l \leq k, l$ minimal mit $s_l.\min(n-1) = \max(n)$
$\Rightarrow \forall 1 \leq i < l : s_i.\min(n-1) \in [-\infty, \max(n)[$
$\overset{I.V.}{\Longrightarrow} \forall 1 \leq i < l : s_i.\text{abmin}(n-1) \in [\alpha, \max(n)[$
$\Rightarrow$Im l-ten Durchgang ist $\alpha < s_l.\min(n-1)$
$\overset{I.V.}{\Longrightarrow} \alpha \leq s_l.\min(n-1) < \beta \Rightarrow s_l.\text{abmin}(n-1,\alpha,\beta) = s_k.\min(n-1)$
Nun wird der Bedingte Befehl 2 ausgeführt und von nun an ist $\alpha = s_l.\text{abmin}(n-1,\alpha,\beta) = s_l.\min(n-1) = \max(n)$
$\forall l < i \leq k : s_i.\min(n-1) \leq \alpha = s_l.\min(n-1) \Rightarrow s_i.\text{abmin}(n-1,\alpha,\beta) = \alpha \not> \alpha$
$\Rightarrow$kein weiterer bedingter Befehl wird ausführt.
$\Rightarrow$keine weitere Änderung von α
$\max(n)$ wird zurückgeben.

5.3.2 Korollar

$n \geq 0 \Rightarrow$
$\text{abmax}(n, -\infty, \infty) = \max(n)$
$\text{abmin}(n, -\infty, \infty) = \min(n)$

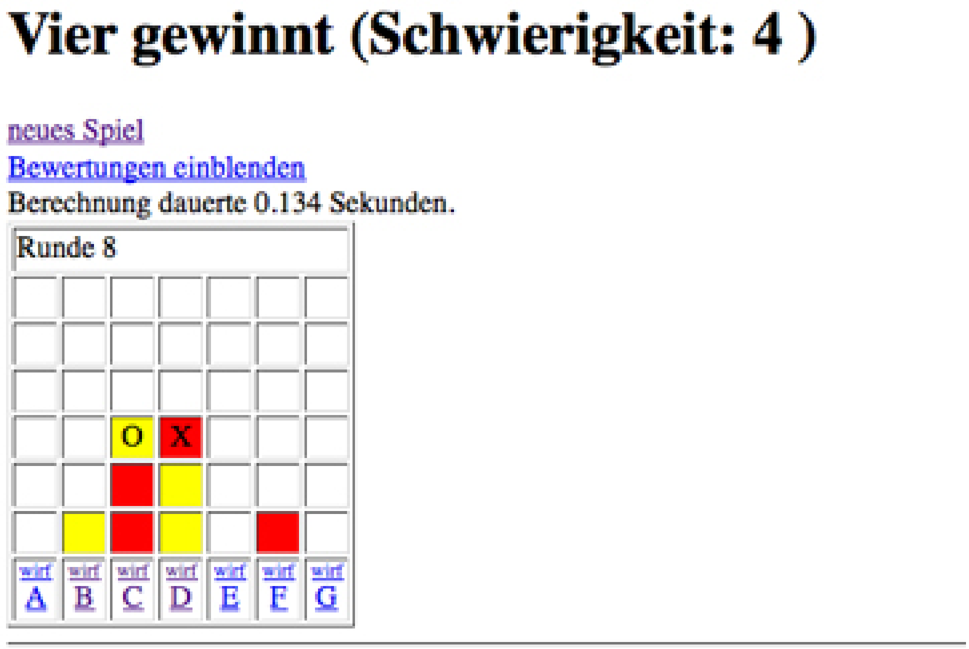
5.3.3 Korollar

Wenn gilt dass für die Funktion $wert()$ immer gilt:
$\alpha < \text{wert}() < \beta \Rightarrow$
$\text{abmax}(n, -\infty, \infty) = \max(n)$
$\text{abmin}(n, -\infty, \infty) = \min(n)$

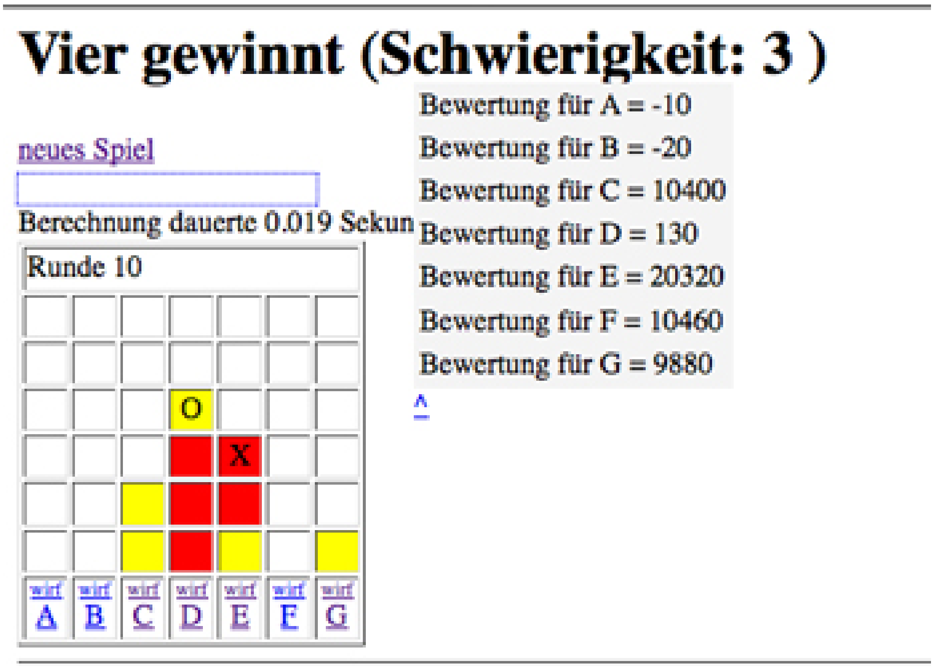
Beweis: Da $\alpha < wert() < \beta \Rightarrow \alpha < \max(n) < \beta$
Für min analog.

6 Implementierung

Für die Implementierung des Algorithmus haben wir PHP (PHP: Hypertext Preprocessor) gewählt.
Dabei muss beachtet werden dass noch einige Änderungen notwendig sind, um einen spielenden Computer zu erschaffen. Er muss nicht nur seine jetzige Situation mit einer gewissen Tiefe n bewerten, sondern er Bewertet die Situation seines Gegners mit einer Tiefe $n-1$ und wählt dann die Möglichkeit aus die am Besten ist.
Ergeben mehrere Strategien den besten Wert soll der Zufall entscheiden, dadurch entsteht eine weiter gewisse Dynamik im Spiel des Computers.
Die graphische Oberfläche ist sehr schlicht gehalten und soll dennoch eine intuitive Bedienung des Spiels ermöglichen.
Als erstes wird ein Schwierigkeitsgrad gewählt (er legt die Tiefe n des Alpha-Beta-Cut Algorithmus fest). Anschließend tätigt der Spieler seinen ersten Zug, der Computer zieht automatisch das für ihn optimale Feld.

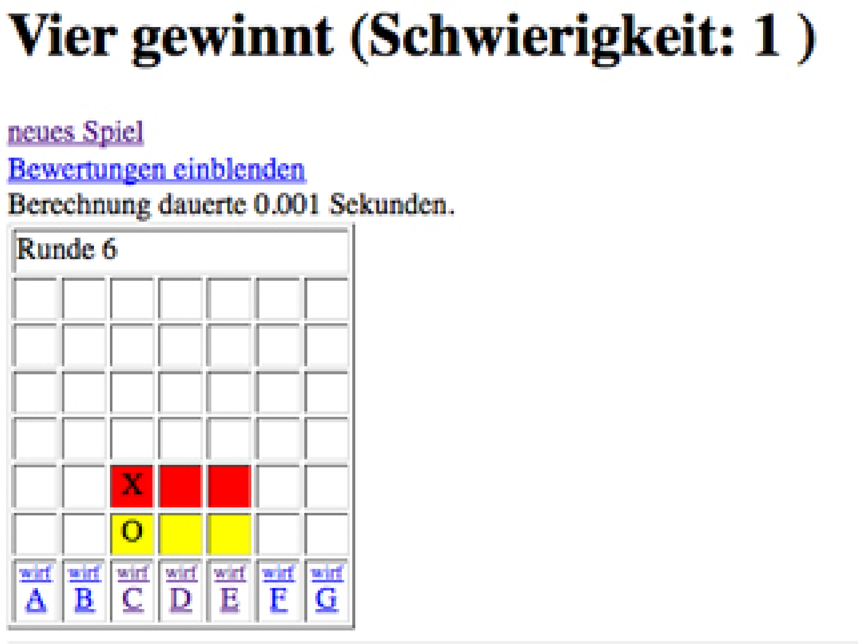


Als zusätzliche Information kann die vom Computer getätigte Bewertung der 7 möglichen Züge eingeblendet werden. Dies ist insbesondere dann von Interesse, wenn man der Meinung ist, dass der Computer gerade einen Fehler getan hat oder sich anders verhalten hat als bei einem vorherigen Spiel in der selben Situation, dies ist dann ein Grund des Zufallsgenerators bei Gleichwertigen besten Möglichkeiten.



6.1 Bekannte Fehler

In niedrigen Schwierigkeitsstufen kann es dazu kommen, dass ein Computer sich nicht " Intelligent" verhält. Das hat damit zu tun dass er das Spiel falsch bewertet, da er nicht weit genug vorhersehen kann (die Tiefe der Suche ist zu gering). So kann er auf Stufe 1 nicht sehen was der Gegner tun könnte, da er nur den Wert des Spielfeldes direkt nach dem Zug bewertet. Selbst auf Stufe 2 kann er nur einen Sieg seines Gegners verhindern, wenn dieser den Sieg nur mit einer einzigen Position erreichen kann. Eines dieser Typischen Spielverläufe ist das "Aufsetzen" auf die Spielersteine. Die Erklärung hierfür ist einfach: Der Computer bewertet die Unterbunden möglichen Vierer nach oben und den eigenen Aufbau eines möglichen Vierers höher als eine frühzeitige Verhinderung eines Waagerechten Vierers seines Gegners.



Ein weiteres “Problem“ ist die “Verwandlungsschwäche“ in höheren Schwierigkeitsgraden. Dabei handelt es sich um das Phänomen, dass der Computer keinen Vierer setzt, auch wenn er es könnte. Auch dies hat eine einfache Erklärung. Er Bewertet mit einem recht weiten Blick in die “Zukunft“ (z.b. 6 Züge). Wenn er nun neben dem sofortigen Gewinn eine weiter Möglichkeit des Sieges sieht (und diese eventuell aufgrund der Weiteren Bewertungskriterien eine noch höhere Bewertung aufweist) kann (oder muss) er diese Möglichkeit wählen. Dies mag dem Spieler seltsam erscheinen, es kann aber keinen Sieg des Computers verhindern, nur hinauszögern, aus diesem Grund ist dies auch nicht als eigentlicher Fehler zu bewerten, nur als “Charakterschwäche“ da dies für den Menschlichen Spieler arrogant wirken könnte.

6.1.1 Zeitaufwand

Um zu verdeutlichen, wie lange die Auswahl der optimalen Position dauert (je nach Schwierigkeitsgrad) wurde eine Alternative Spielform implementiert. Die Auswahl der Position funktioniert mit der selben Funktion, allerdings werden beide Spieler vom Computer gesteuert, gemessen wird die durchschnittliche Dauer pro Zug ab Schwierigkeitsstufe 4 (bei geringerer Stufe waren die Werte nicht auswertbar). Die

Tabelle 1: Zeiteinschätzung

Schwierigkeitstufe	Zugdauer in sec
4	0,117
5	0,567
6	1,61
7	9,73
8	43,2

Rechenzeit steigt also abhängig von der Tiefe des Alpha-Beta-Cut exponentiell. Bei

Erhöhung der Schwierigkeit vervielfacht sich die Rechenzeit. Eine Schwierigkeit höher als 7 oder 8 würde aufgrund der Langen Wartezeiten keine Freude mehr bereiten.
Bei der benötigten Zeit ist außerdem interessant, dass die Berechnung von 2 auf den ersten Blick völlig äquivalenten Spielfelder (z.b. Spiegelverkehrt) unterschiedlich lange dauern können. Dies ist rührt daher, dass für die Verkürzung der Rechenzeit die Cuts sehr wichtig sind, und diese sind abhängig von der Reihenfolge der Positionen zur Simulation. Da in der Implementierung diese Reihenfolge fest ist (von links nach rechts) kann eine Spiegelung des Spielfeldes Auswirkung haben auf die Rechenzeit.

6.2 Veröffentlichung

Die Implementierung des Vier Gewinnt gegen die Künstliche Intelligenz ist bis auf weiteres Online spielbar. Zu erreichen unter:
http://mathe.weissi.net/viergewinnt/