Signalisierungsspiele

in der Standardform

Projekt

Vorgelegt von:
Christine Schäffler, Benjamin Eberwein, Dirk Lauschke

München, den 20. Juli 2006

Referent:
Prof. Dr. Schottenloher

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Spieltheorie beschäftigt sich mit Situationen, in denen meist mehrere Subjekte strategisch interagieren und Entscheidungen treffen. So findet sie Anwendung vor allem in der Wirtschaft, aber auch in der Politik und in alltäglichen Situationen. In der Realität bestehen oft Ungewissheiten über die Eigenschaften der Gegenspieler, so daß Aktionen von Erwartungen abhängig sind, die man an die Gegenspieler stellt. Umgekehrt könnte ein Spieler versuchen, sich Vorteile zu verschaffen, indem er ,,Signale” aussendet, die seinem Gegenspieler falsche Annahmen suggerieren. Mit Situationen wie diesen beschäftigt sich die Theorie der Signalisierungsspiele, kurz Signalspiele, die wir im Folgenden vorstellen wollen.
Hierzu möchten wir uns nur auf die wesentlichen Aspekte der Signalspiele wie beispielsweise Spielverlauf, extensive Form und die zwei gängisten Gleichgewichtsideen (Pooling-Gleichgewicht und separierendes Gleichgewicht) beschränken und betrachten deswegen überwiegend nur die Standardform. Darüber hinaus werden wir zur Anschaulichkeit die Theorie anhand eines konkreten Beispiels erläutern.
Im Anschluß an den theoretischen Teil werden wir berichten, wie wir ein Signalspiel in der Realität durchgeführt haben und die beobachteten Ergebnisse analysieren.

2 Theorie der Signalisierungsspiele

2.1 Einführung

Signalspiele lassen sich in die Kategorie dynamische Spiele mit unvollständiger Information einordnen, d.h. es handelt sich um Spiele, bei denen die Spieler ihre Aktionen von den vorhandenen Informationen abhängig machen, die sie in der Vergangenheit erhalten haben. Weiter kann jeder Spieler alle bisherigen Züge beobachten und das Spiel verläuft sequentiell. Unvollständige Information bedeutet in diesem Zusammenhang, daß gewisse spezifische Eigenschaften eines Spielers seinen Gegenspielern nicht bekannt sind (z.B. Risikofreude, Stärke).
Kurz kann man die Theorie der Signalspiele so beschreiben: Ein Spieler hat eine gewisse Eigenschaft, über die nur er Bescheid weiß. Der Gegenspieler hat eine Erwartung darüber, welche Eigenschaft dies ist. Dem ersten Spieler ist es möglich, ein Signal bzw. eine Nachricht auszusenden, die von dem Gegenspieler beobachtet bzw. empfangen wird. Dieser wird nun aufgrund der erhaltenen Botschaft dem Spieler eine Eigenschaft zuordnen und so reagieren, daß er den größtmöglichen Nutzen aus seiner Handlung erhält. Der erste antizipiert dies und wird seine Nachricht so wählen, daß er auch den maximalen Nutzen erhalten kann. Nach diesen Überlegungen wird das Spiel durchgeführt.

2.2 Erläuterung wichtiger Begriffe

Bevor wir ausführlich die Theorie erläutern werden, geben wir einen ersten vagen Überblick über die im Folgenden verwendeten Begriffe, um den Leser mit dem Stoff vorab etwas vertraut zu machen. Die Präzisierung erfolgt in (1.3):

- Sender: Es handelt sich um den Spieler, der eine gewisse Eigenschaft hat und dem Gegenspieler ein „Signal" (siehe unten) sendet.
- Empfänger: Er beobachtet das Signal und wählt daraufhin eine mögliche Aktion.
- Typ: Ein Typ legt die Eigenschaften des Senders fest (z.B. stark, schwach).
- Signal: Eine Botschaft, die der Sender dem Empfänger aussendet.
- Aktion: Eine Handlung, die der Empfänger wählt, nachdem er das Signal des Senders empfangen hat.
- Auszahlung: Der Nutzen, den die Spieler am Ende des Spiels erhalten werden.
- Belief: Wahrscheinlichkeitsverteilung über die möglichen Typen des Senders, die der Empfänger annimmt.

2.3 Die Struktur der Signalisierungsspiele

Im Folgenden wollen wir uns mit der Theorie der Signalspiele genau auseinandersetzen. Darüberhinaus verwenden wir ein Standardbeispiel aus Holler, Illing „Einführung in die Spieltheorie", anhand dessen die Thematik veranschaulicht wird.
Man stelle sich folgende Situation vor: In einer Bar sitzt ein Mann (A) der entweder ein Schwächling oder ein Schläger sein kann. Ebenso ist ein zweiter Mann (B) anwesend, der sich gerne prügeln würde. B muß sich entscheiden, ob er mit A einen Kampf beginnen will oder nicht. Dabei weiß B nicht, ob es sich bei A um einen Schwächling oder einen Schläger handelt.

Signalspiele sind in sehr unterschiedlichen Formen denkbar (z.B. Variatonen bei der Anzahl der Spiele, Wiederholungen im Spielverlauf etc.). Wir werden uns in dieser Arbeit auf die Standardform (siehe unten) beschränken, in der zwei Spieler interagieren, von denen der zuerst Spielende als Sender bezeichnet wird und der zweite als Empfänger.

In Signalspielen wird zunächst durch die „Natur" der Typ t_i des Senders bestimmt mit $t_i \in T := \{t_1, ..., t_I\}$ wobei $I \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq I$ entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsverteilung η. Hierbei ist ein Typ t_i eine Charakterisierung, die die Eigenschaften des Senders festlegt. T sei die Menge, aus der einer der möglichen Typen ausgewählt wird. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung sei gegeben durch $\eta : T \to [0,1], t_i \mapsto \eta(t_i)$ mit $\sum_{i=1}^{I} \eta(t_i) = 1$ und gibt die Wahrscheinlichkeit $\eta(t_i)$ an, mit der der Sender vom Typ t_i ist. Diese Verteilung ist beiden Spielern bekannt, jedoch erfährt der Empfänger im Gegensatz zum Sender nicht, welchen Typ die Natur gewählt hat.

In dem obigen sog. Quiche-Bier-Beispiel ist A der Sender und B der Empfänger und $T = \{Schwächling, Schläger\}$ mit $t_1 = Schwächling$ und $t_2 = Schläger$, also $I = 2$. Weiter sei (beliebig gewählt) $\eta(t_1) = \eta(Schwächling) = 0,1$ $\eta(t_2) = \eta(Schläger) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Der Sender beginnt das Spiel, indem er eine Botschaft $b_i \in B = \{b_1, ..., b_J\}$ mit $J \in \mathbb{N}$ wählt und sie dem Empfänger signalisiert, wodurch sich auch die Bezeichnungen der Spieler erklären. B sei hier die Menge aller möglichen Botschaften.

Im obigen Spiel könne Spieler A entweder Quiche oder Bier zum Frühstück bestellen, d.h. $B = \{Quiche, Bier\}$, was von Spieler B beobachtet wird.

Daraufhin wählt der Empfänger eine erlaubte Aktion a_k aus einer gegebenen Aktionsmenge $A = \{a_1, ..., a_K\}$ mit $K \in \mathbb{N}$.

Bei unserem Beispiel hat Spieler B die Aktionsmenge $A = \{kämpfen, nichtkämpfen\}$.

Stellen wir allgemein das Signalspiel als Spiel in extensiver Form (M, H, j, P, u) dar, so ist die Spielermenge $M = \{Natur, Sender, Empfänger\}$.

Die Historienmenge $H = \{\emptyset\} \cup \{(t_i)|1 \leq i \leq I\} \cup \{(t_i, b_j)|1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J\} \cup \{(t_i, b_j, a_k)|1 \leq i \leq$

$I, 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K\}$. Wie man an der Historienmenge sehen kann, bezieht sich obiges auf die sog. Standardform der Signalisierungsspiele:
In dieser gibt es jeweils nur einen Sender und einen Empfänger. Jeder Typ des Senders kann dieselben Botschaften aussenden, da sonst der Empfänger gewisse Typen im Voraus auschließen könnte.

Ebenso kann der Empfänger egal welches Signal er empfangen hat, aus allen Aktionen wählen. Das Spiel wird nur einmal durchgeführt.

Falls man diese Einschränkungen nicht berücksichtigt, ist die Sachlage komplizierter, was wir an der Historienmenge demonstrieren wollen. Da nun B_{t_i} ($B_{t_i} :=$ die Menge der Botschaften, die dem Sender vom Typ t_i zur Verfügung stehen) von t_i abhängt, ist $B_{t_i} \subset B$.
$A = \uplus_{b_j \in B} A_{b_j}$. $A_{b_j} :=$ die Menge der Aktionen, die dem Sender zu Verfügung stehen, wenn er b_j beobachtet. Damit ist $H = \{\emptyset\} \cup \{(t_i)|1 \leq i \leq I\} \cup \{(t_i, b_j)|1 \leq i \leq I, b_j \in B_{t_i}\} \cup \{(t_i, b_j, a_k)|1 \leq i \leq I, b_j \in B_{t_i}, a_k \in A_{b_j}\}$, weiter ist dann im allgemeinen Fall die Entscheidungsknotenmenge $E = \{\emptyset\} \cup \{(t_i)|1 \leq i \leq I\} \cup \{(t_i, b_j)|1 \leq i \leq I, b_j \in B_{t_i}\}$ und die Endknotenmenge $Z = H \backslash E$.

Zurück zur Standardform: Die Spielerfunktion j bildet E auf M ab und ist gegeben durch $j : E \to M$ mit $j(\emptyset) = Natur, j((t_i)) = Sender$ für $1 \leq i \leq I$ und $j((t_i, b_j)) = Empfänger$ für $1 \leq i \leq I, b_j \in B$.

Da der Sender weiß, welchen Typ t_i die Natur gewählt hat, besitzt er nur einelementige Informationsmenge $I_i^s := \{(t_1)\}, ..., I_{|T|}^s = \{(t_i)\}$. Daher ist Einführung eine Informationszerlegung P_E nur für den Empfänger sinnvoll, da dieser nur eine Botschaft beobachten kann, aber nicht weiß, welcher Typ sie gesendet hat. Eine Informationszerlegung $P_E := \{I_i^E, ..., I_{|B|}^E\}$, wobei $I_k^E :=$ die Menge aller Historien, deren letztes Glied b_k ist, $1 \leq k \leq |B|$, ist die Menge der zum Empfänger gehörigen Informationsmengen. Eine Informationsmenge enthält sonst alle Historien, die zurselben Entscheidungssituation führen und bei dennen der Spieler, zu den die Informationsmenge gehört, nicht unterscheiden kann, welche der Historien gespielt wurde. In diesem Sinne ist $I_k^E = \{(t_1, b_k), (t_2, b_k), ..., (t_I, b_k)\}$

Kommen wir nun zu den Auszahlungsfunktionen:
Auszahlungskunktion des Senders: $u_S : Z \to \mathbb{R}, (t, b, a) \mapsto u_S(t, b, a)$
Auszahlungsfunktion des Empfängers: $u_E : Z \to \mathbb{R}, (t, b, a) \mapsto u_E(t, b, a)$

und damit $u : Z \to \mathbb{R}^2, (t, b, a) \mapsto (u_S(t, b, a), u_E(t, b, a))$ mit $t \in T, b \in B, a \in A$.

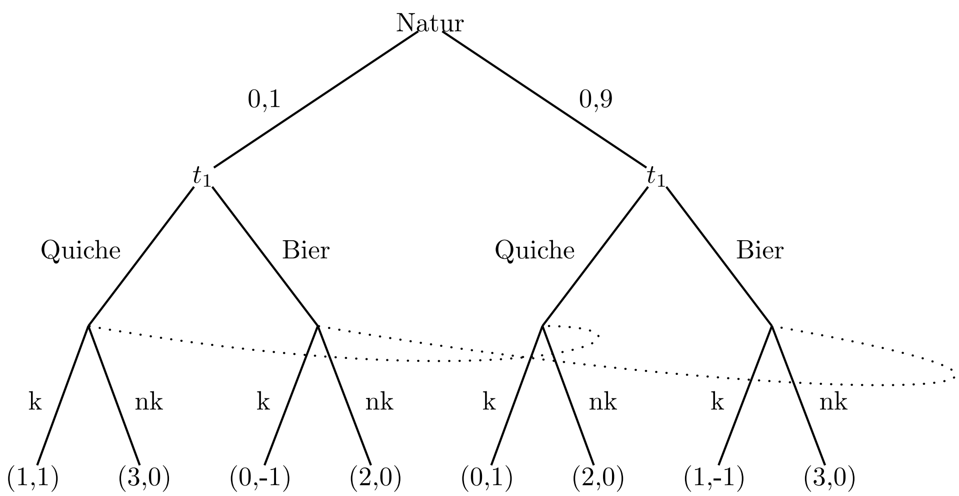
Einen weiteren wesentlichen Gesichtspunkt stellt der Begriff der Strategie dar. Allerdings spielen für die verwendeten Gleichgewichtsbetrachtungen nur sog. reine Strategien eine Rolle, weswegen wir uns auf diese beschränken werden. Eine reine Strategie der Natur ist eine Abbildung, $s_N : \{\emptyset\} \to T, \emptyset \mapsto t_E$, des Senders: $s_S : \{(t_1), ..., (t_I)\} \to B, (t) \mapsto b$ und der Empfänger: $s_E : P_E \to A, I^E \mapsto a$.

Abschließend wollen wir noch den Spielverlauf präzisieren. Das Spiel beginnt bei $\emptyset$ mit $j(\emptyset) =$ Natur. Hier wählt die Natur gemäß η den Typ $t \in T$. Daraufhin erfährt der Sender diesen Typ. $j((t)) =$ Sender wählt eine Botschaft $b \in B$, die dem Empfänger übermittelt wird.
$j((t, b)) =$ Empfänger reagiert auf die Botschaft mit einer Aktion $a \in A$. Das Spiel ist nun zu Ende und die Auszahlungsmengen werden zugeteilt.

Zurück zu unserem Beispiel: hier ist also $M = \{Natur, A, B\}$. Die Natur gibt vor, ob A ein Schwächling oder ein Schläger ist. Anschließend wird A ein Signal aussenden, indem er entweder Quiche oder Bier bestellt. B sieht die Wahl von A und enscheidet, ob er kämpft oder nicht kämpft.

$$H = \begin{cases} E \begin{cases} \{\emptyset\} \cup \{(Schwächling), (Schläger), \\ (Schwächling, Quiche), (Schwächling, Bier), (Schläger, Quiche), \\ (Schläger, Bier), \end{cases} \\ Z \begin{cases} (Schwächling, Quiche, Kampf), (Schwächling, Quiche, nichtKampf), (Schwächling, Bier, Kampf), \\ (Schwächling, Bier, nichtKampf), (Schläger, Quiche, Kampf), \\ (Schläger, Quiche, nichtKampf), (Schläger, Bier, Kampf), \\ (Schläger, Bier, nichtKampf)\} \end{cases} \end{cases} .$$

Es ist $j(\emptyset) = Natur, j(X) = A$ mit $X \in \{(Schwächling), (Schläger)\}, j(Y) = B$ mit $Y \in E \backslash (\{\emptyset\} \cup \{(Schwächling), (Schläger)\})$.
Es sei nun Folgendes gegeben: B würde gerne gegen einen Schwächling kämpfen, nicht aber gegen einen Schläger. A würde gerne Bier zum Frühstück trinken, falls er ein Schläger ist, bzw. Quiche essen, falls er ein Schwächling ist. In beiden Fällen möchte A einem Kampf entgehen. Daraus ergebe sich die Auszahlungsfunktion, (Schläger = Sl, Schwächling = Sw, Quiche = Q, Bier = Br, nicht kämpfen = nk, kämpfen = k):
u(Sw,Q,k)=(1,1), u(Sw,Br,k)=(0,1), u(Sw,Q,nk)=(3,0), u(Sw,Br,nk)=(2,0)
u(Sl,Q,k)=(0,-1), u(Sl,Br,k)=(1,-1), u(Sl,Q,nk)=(2,0), u(Sl,Br,nk)=(3,0).
Dieses Spiel kann man auf folgende Art veranschaulichen:



2.4 Gleichgewichtsanalyse

In den oben erwähnten 2-Personen-Spielen (und Natur) muß der Empfänger einen sog. *Belief* darüber haben, in welchem Knoten er sich befindet, wenn er das Signal erhalten hat. Ein Belief ist als eine Funktion η (Wahrscheinlichkeitsmaß), die jedem Knoten der Informationsmenge, in der er sich nun befindet, einen Wert zwischen 0 und 1 zuordnet. Formal ausgedrückt:
Sei $P_E := \{I_1^E, ..., I_n^E\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ die Menge aller Informationsmengen
$I_k^E := \{K_{k1}, ..., K_{kl}\}, l \in \mathbb{N}$. K_{ki} sei der i-te Knoten der Informationsmenge I_k^E.
Sei weiter μ_j die zur Informationsmenge I_j^E gehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung, dann gilt:
$\mu_j : I_j^E \rightarrow [0,1]$, mit $K_j \mapsto \mu_j(K_j)$, mit $\sum_{K_j \in I_j} \mu(K_j) = 1 \forall I^E \in P_E$.

Im Allgemeinen kann man den Begriff des Gleichgewichts bei Signalspielen als eine Erweiterung des bekannten Begriffs Nash-Gleichgewicht ansehen, da auch hier gegeben der Strategie des Gegenspielers ein Spieler eine beste Antwort wählt. Hierzu kommt u.a., dass dies für jeden Typ des Senders gelten muß.
Im Folgenden wollen wir den Begriff der Strategiekombination einführen. Unter einer Strategiekombination versteht man ein Tupel, das die Strategie des Senders sowie die Strategie des Empfängers und für jede Informationsmenge der zugehörigen Belief enthält:
$(s_S, s_E, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_{|P_E|}) = ((s_S(t_1), ..., s_S(t_I),$
$(s_E(I_1^E), ..., s_E(I_{|B|}^E)), ((\mu_1(K_{11}), ..., \mu_1(K_{1|I_1^E|})), ..., (\mu_{|P_E|}(K_{|P_E|1}, ..., \mu_{|P_E}(K_{|P_E||I_{|P_E|}^E|})))$ Hieraus ergibt sich folgender Gleichgewichtsbegrif, den wir in der weiteren Arbeit stets verwenden werden. Unter einem

Gleichgewicht verstehen wir eine Strategienkombination, bei der gilt:
$u_S(s_S^*, s_E^*, \mu_1, ..., \mu_{|P_E|}) \geq u_S(s_S, s_E^*, \mu_1, ..., \mu_{|P_E|}) \forall s_S \neq s_S^*$ und
$u_E(s_S^*, s_E^*, \mu_1, ..., \mu_{|P_E|}) \geq u_E(s_S^*, s_E, \mu_1, ..., \mu_{|P_E|}) \forall s_E \neq s_E^*$
Für Signalspiele sind viele Gleichgewichtskonzepte, die auf obiger Definition beruhen, denkbar. Wir werden uns in dieser Arbeit auf die zwei wichtigsten Konzepte beschänken:

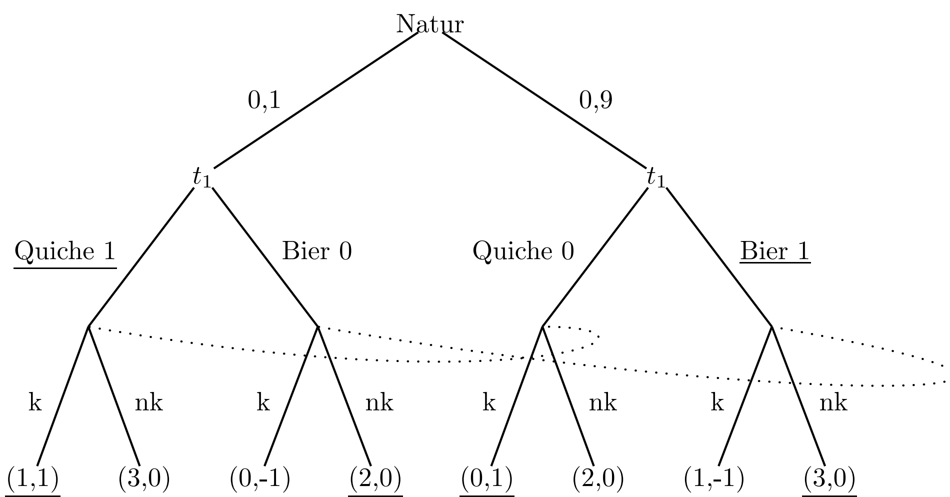
2.4.1 Separierende Gleichgewichte

Definition:
Ein separierendes Gleichgewicht ist ein Gleichgewicht (im obigen Sinn), bei dem verschiedene Typen des Senders verschiedene Botschaften wählen.

Dies impliziert, dass es für die Existenz eines separierenden Gleichgewichts mindestens genauso viele Botschaften wie Typen des Senders geben muß.
Um ein separierendes Gleichgewicht zu finden, ordnet man jedem Typen t_i genau eine Botschaft b_j zu, die er mit Wahrscheinlichkeit $p(b_j) = 1$ spielt, alle anderen Botschaften spielt er mit der Wahrscheinlichkeit $p(b_k)_{k \neq j} = 0$, wobei $p : B \rightarrow [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Daraus lässt sich der Belief für den Empfänger ableiten, denn klar ist
$p(b_K) = \mu(K_{b_k t_i}) = \begin{cases} 1 & \text{falls Typ } t_i \ b_k \text{ spielt} \\ 0 & \text{für alle anderen Typen} \end{cases}$
hierbei sei $K_{b_k t_i}$ der Entscheidungsknoten, der zur Historie (t_i, b_k) gehört. Deshalb weiß der Empfänger, nachdem er eine Botschaft erhalten hat, in welchem Entscheidungsknoten er sich befindet. Daraufhin wählt er seine beste Antwort.
Nun bleibt zu prüfen, ob gegeben der Reaktion des Empfängers es tatsächlich optimal für den Sender war, die entsprechende Botschaft auszusenden. Falls also ohne Einschränkung
$u_S(s_S^*, s_E^*, (1, 0, 0, ..., 0), (0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 0)) \leq u_S(s_S, s_E^*, (1, 0, 0, .., 0), (0, ..., 0), ..., (0, ..., 0)) \forall s_S \neq s_S^*$.
Wenn dies so ist, handelt es sich um ein separietendes Gleichgewicht.

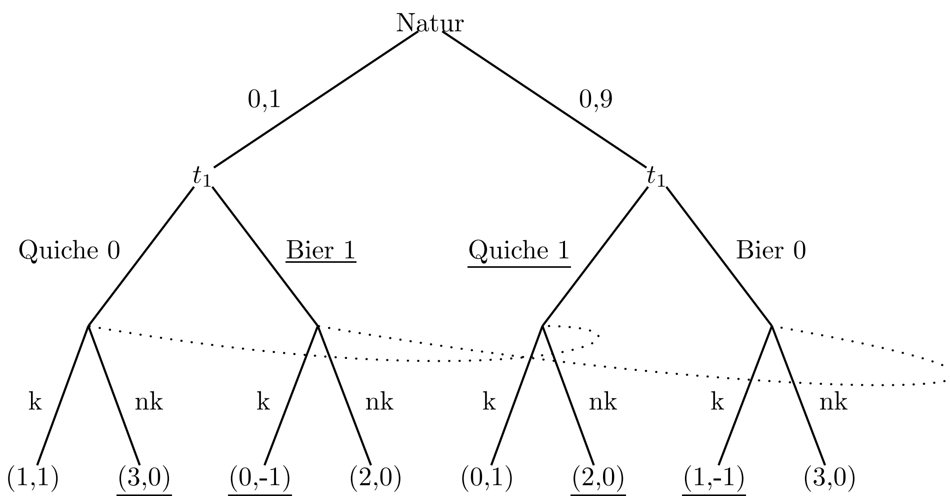
Bei unserem Bier-Quiche-Beispiel betrachten wir zunächst ein mögliches separierendes Gleichgewicht (Quiche, Bier), dies bedeutet, daß der Sender Quiche spielt sofern er Typ Schwächling ist und Bier, falls die Natur für ihn Schläger ausgewählt hat:
Der Empfänger vermutet also aufgrund seiner Beliefs, dass der Sender Quiche spielt, wenn dieser Typ Schwächling ist. Deswegen wird er, wenn er das Signal Quiche bekommt, *immer* kämpfen, weil er antizi-

piert, dass er sich im Knoten (Schwächling, Quiche) befindet,
$u_E((Quiche, Bier), (kämpfen, nichtkämpfen), (1,0), (0,1)) = 1 >$
$0 = u_E((Quiche, Bier), (nichtkämpfen, nichtkämpfen), (1,0), (0,1))$. Erhält der Empfänger dagegen das Signal Bier, so vermutet er, daß es sich bei dem Sender um Typ Schläger handeln muß. Betrachtet man sich nun die Auszahlungen für den Empfänger, so ergibt sich, dass der Empfänger stets nicht kämpft, wegen
$u_E((Quiche, Bier), (kämpfen, nichtkämpfen), (1,0), (0,1))) = 0 >$
$-1 = u_E((Quiche, Bier), (kämpfen, kämpfen), (1,0), (0,1))$. Dies sei am unteren Baum veranschaulicht:



Jedoch handelt es sich hierbei nicht um ein Gleichgewicht, da der Sender sofern er Typ Schwächling ist, Anreiz hat abzuweichen:
$u_S((Bier, Bier), (kämpfen, nichtkämpfen), (1,0), (0,1)) = 2 >$
$1 = u_S((Quiche, Bier), (kämpfen, nichtkämpfen), (1,0), (0,1)$.

Betrachte man analog die zweite Möglichkeit eines separierendes Gleichgewichtes (Bier, Quiche): obige Ausführung gilt entsprechend und ist aus folgendem Spielbaum ersichtlich:
Auch hier handelt es sich nicht um ein Gleichgewicht,
weil $u_S((Quiche, Quiche), (nichtkämpfen, kämpfen), (0,1), (1,0))) = 3 >$
$0 = u_S((Bier, Quiche), (nicht, kämpfen, kämpfen), (0,1), (1,0))$, d.h. der Sender hat Anreiz abzuweichen.



2.4.2 Pooling-Gleichgewicht

Definition:
Ein Pooling-Gleichgewicht ist ein Gleichgewicht (im obigen Sinn), bei dem alle Typen des Senders dieselbe Botschaft wählen.

Hieraus ergibt sich, dass der Empfänger nachdem er das Signal beobachtet hat, automatisch einen Belief darüber hat, um welchen Typ des Senders es sich handelt. Denn wie eingehend erwähnt, wählt die Natur mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung η den Typen des Senders, und da der Empfänger bei jedem Typen dieselbe Botschaft erhalten wird, kann er davon ausgehen, dass es sich mit Wahrscheinlichkeit $\eta(t_i)$ um Typ t_i handelt, d.h. $\mu(K_{bt_i} = \eta(t_i)$.

Der Empfänger wird nun, gegeben seines Beliefs seinen Erwartungsnutzen (EU) maximieren. Das heißt, er wird diejenige Aktion wählen, die seine erwartete Auszahlung maximiert.

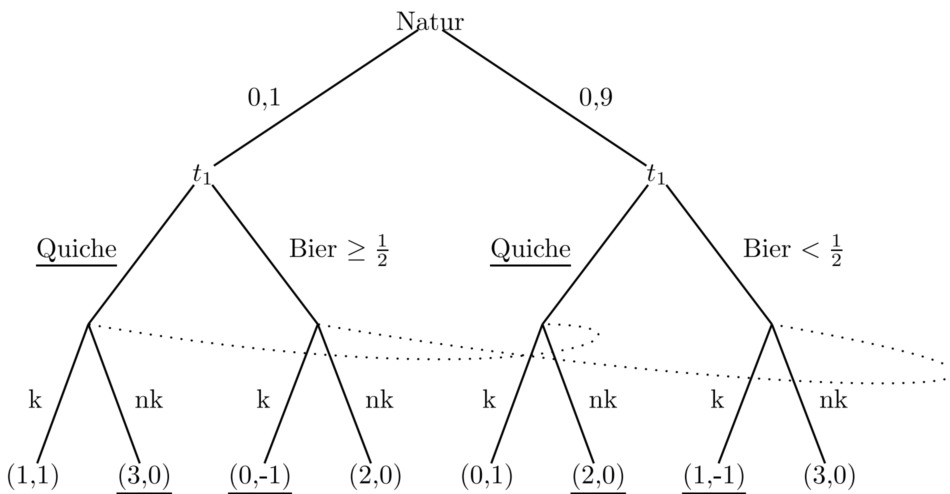
Um zu prüfen, dass es sich bei den gewählten Aktionen um ein Gleichgewicht handelt, bleibt zu prüfen, ob ein Typ des Senders bzw. des Empfängers, gegeben der Strategie des Empfängers bzw. des Senders, einen Anreiz hat, von seiner Strategie abzuweichen. Um dies zu entscheiden, ist es wichtig zu wissen, welche Aktion der Empfänger bei den jeweils anderen Botschaften wählt, falls er diese beobachten würde. Dies hängt von den Beliefs des Empfängers ab, da er gegeben dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung in der entsprechenden Informationsmenge seinen erwarteten Nutzen maximiert.

Pooling Gleichgewichte in unserem Beispiel:
Zunächst überprüfen wir, ob es ein Pooling-Gleichgewicht gibt, bei dem beide Typen (Schwächling, Schläger) Quiche wählen.
Der Belief des Empfängers, falls er Quiche beobachtet, ist in der sich daraus ergebenden Informationsmenge (links) $\mu_q = 0,1$ und $1 - \mu_q = 0,9$, d.h. er vermutet mit Wahrscheinlichkeit 0,1, dass es sich bei dem Sender um Typ Schwächling handelt, wenn er Quiche beobachtet. Seine erwarteten Nutzen sind:
$EU_{Empfänger}(kämpfen|Quiche) = 0,1 \cdot 1 + 0,9(-1) = -0,8$ und
$EU_{Empfänger}(nichtkämpfen|Quiche) = 0,1 \cdot 0 + 0,9 \cdot 0 = 0$ also $EU_{Empfänger}(kämpfen|Quiche) < EU_{Empfänger}(nichtkämpfen|Quiche)$ damit wird der Empfänger als Aktion nicht kämpfen wählen.
Nun bleibt zu prüfen, ob ein Typ des Senders eine höhere Auszahlung erhalten kann, wenn er statt Quiche Bier wählt.

Beginnen wir mit Typ Schläger. Für ihn würde es sich lohnen abzuweichen, wenn der Empfänger auf die Botschaft Bier mit nicht kämpfen reagiert, da
$u_S((Quiche, Quiche), (nichtkämpfen, nichtkämpfen), (0, 10, 9), (\mu_B, 1 - \mu_B)) = 2 <$
$3 = u_S((Quiche, Bier), (nichtkämpfen, nichtkämpfen), (1, 0, 9), (\mu_b, 1 - \mu_B))$.

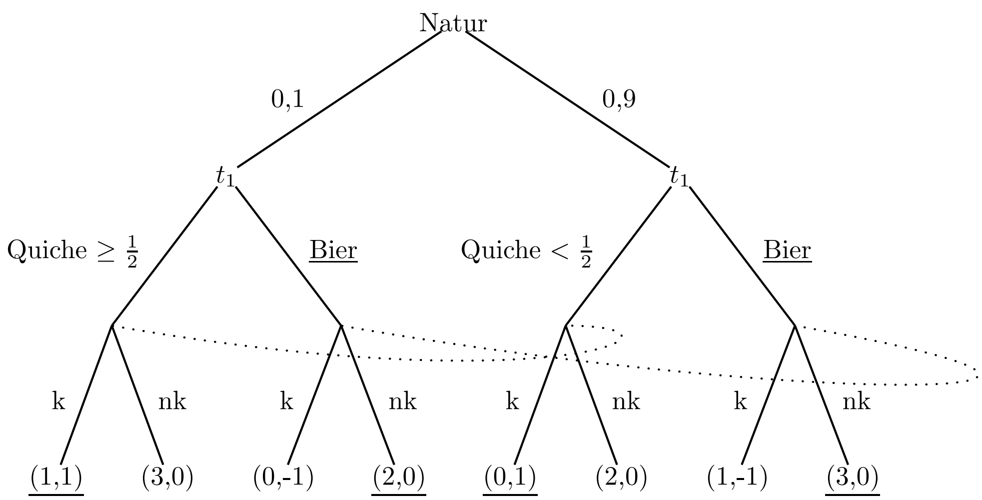
Bei welchem Belief μ_B in der Informationsmenge Bier wird der Empfänger tatsächlich nicht kämpfen wählen?
Nur dann, wenn
$EU_{Empfänger}(Bier|nichtkämpfen) = \mu_b \cdot 0 + (1-\mu_B)0 > \mu_B \cdot 1 + (1-\mu_B)(-1) = EU_{Empfänger}(Bier|kämpfen) \Rightarrow$
$0 > \mu_B - 1 + \mu_B \Rightarrow 1 > 2\mu_B \Rightarrow \mu_B < \frac{1}{2} \Rightarrow$ Falls $\mu_B \geq \frac{1}{2}$, lohnt es sich für den Schläger nicht, von Quiche abzuweichen.

Kommen wir zum Typ Schwächling. Wie an den Auszahlungen ersichtlich würde dieser nie abweichen, da er seine maximale Auszahlung (3) bereits erhält
$\Rightarrow$ Alle Pooling Gleichgewichte auf Quiche: $[(Quiche, Quiche), (nk, k), \mu_q = 0,1 \ \mu_B \geq \frac{1}{2}]$



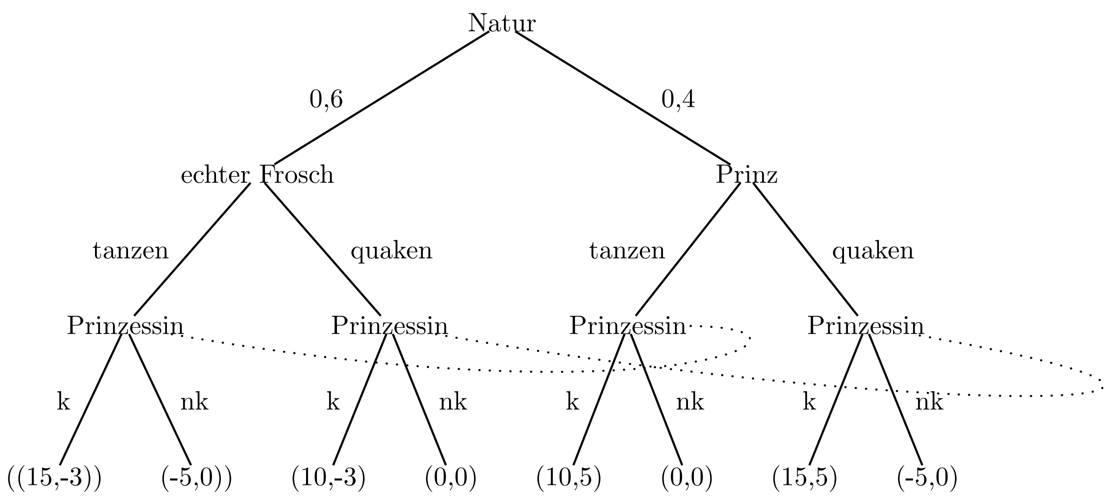
Analog Pooling auf (Bier,Bier)
$\mu_B = 0,1$ und $1 - \mu_B = 0,9$
$EU_{Empfänger}(Bier|kämpfen) = 0,1 \cdot 1 + 0,9(-1) = -0,8$
$EU_{Empfänger}(Bier|nichtkämpfen) = 0,1 \cdot 0 + 0,9 \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow EU_{Empfänger}(Bier|kämpfen) < EU_{Empfänger}(Bier|nichtkämpfen)$
$\Rightarrow$ Empfänger wählt nicht kämpfen.

Für Typ Schwächling des Senders lohnt sich eine Abweichung vom Bierkonsum, falls der Empfänger auf Quiche mit nicht kämpfen reagieren wird. Dies tut er sofern
$EU_{Empfänger}(Quiche|nichtkämpfen) = \mu_q \cdot 0 + (1-\mu_q)0 > \mu_q \cdot 1 + (1-\mu_q)(-1) = EU_{Empfänger}(Quiche|nichtkämpfen) \Rightarrow$
$0 > -1 + 2\mu_q \Rightarrow \mu_q < \frac{1}{2} \Rightarrow$ Für $\mu_q \geq \frac{1}{2}$ hat der Schwächling keinen Anreiz abzuweichen.
Der Schläger erhält bereits seine maximale Auszahlung und würde sich bei Abweichen nie verbessern.$\Rightarrow$Alle Pooling Gleichgewichte auf Bier sind $[(Bier, Bier), (k, nk), \mu_q \geq \frac{1}{2}, \mu_B = 0,1]$



3 Praktischer Teil

Einen wesentlichen Anteil an unserer Arbeit soll die praktische Durchführung eines von uns erdachten Spiels darstellen.
Wir wollen es als das Froschspiel bezeichnen. In diesem Spiel entscheidet zunächst die Natur, ob es sich bei dem Sender um Typ 1 einen echten Frosch oder Typ 2 einen verwunschenen Prinzen handelt. Mit Wahrscheinlichkeit 0,6 handle es sich um einen Frosch und mit Wahrscheinlichkeit 0,4 um einen verwunschenen Prinzen. Der Sender kann, nachdem er seinen Typ erfahren hat, als Signal Tanzen oder Quaken wählen. Der Empfänger, hier eine Prinzessin, beobachtet das Signal und kann sich daraufhin entscheiden, ob er den Frosch küsst oder nicht küsst. Hierbei möchte der Sender vom Typ echter Frosch gerne geküsst werden, am liebsten ist es ihm wenn er das noch mit Tanzen verbinden kann. Wird er nicht geküsst, hätte er lieber gequakt da Tanzen eine vergebene Mühe für ihn war. Für den Sender vom Typ Prinz ist es am schönsten zu quaken und geküsst zu werden, da es ihm besser gefällt, geküsst zu werden, obwohl er nur gequakt hat. Wird er hingegen nicht geküsst und hat er gequakt, so ist dies peinlich für ihn und gibt ihm somit die geringste Auszahlung. Die Prinzessin würde sehr gerne einen Prinzen finden, wobei es ihr egal ist ob der Sender getanzt oder gequakt hat. Am unangenehmsten ist für die Prinzessin, den echten Frosch zu küssen.
Das Spiel kann folgendermaßen veranschaulicht werden:



Wir wollen nun exakt die extensiven Form dieses Spiels beschreiben:
Die Spielermenge $M = \{Natur, Frosch, Prinzessin\}$ Die Historienmenge

$$H = \begin{cases} E := \begin{cases} \{\emptyset\} \cup \{echterFrosch), Prinz) \\ (echterFrosch, quaken), (echterFrosch, tanzen), \\ (Prinz, quaken), (Prinz, tanzen)\} \cup \end{cases} \\ Z := \begin{cases} \{(echterFrosch, quaken, küssen), (echterFrosch, quaken, nichtküssen), \\ (echterFrosch, tanzen, küssen), (echterFrosch, tanzen, nichtküssen), \\ (Prinz, quaken, küssen), (Prinz, quaken, nichtküssen), \\ (Prinz, tanzen, küssen), (Prinz, tanzen, nichtküssen)\} \end{cases} \end{cases}$$

Die Spielerfunktion $j : E \to M$ ist gegeben durch $j(\emptyset) = Natur, j((echterFrosch)) = Sender, j((Prinz)) = Sender$, $j(A) = Empfänger$ für $A \in E \backslash \{\emptyset, (echterFrosch), (Prinz)\}$.
Die Informationszerlegung $P_E = \{I^E_{quaken}, I^E_{tanzen}\}$ mit $I^E_{quaken} = \{(echterFrosch, quaken), (Prinz, quaken)\}$ und $I^E_{tanzen} = \{(echterFrosch, tanzen), (Prinz, tanzen)\}$.
Die Auszahlungen können aus dem Spielbaum abgelesen werden und werden hier nicht explizit angegeben, da dafür eine Kenntnis der Beliefs $\mu_{quaken}, \mu_{tanzen}$ notwendig ist und diese an dieser Stelle noch nicht bekannt ist.
Wir haben das Spiel mit zehn Studenten die nicht in der Spieltheorie erfahren sind auf folgende Weise durchgeführt:
Es wurden fünf Zweiergruppen gebildet, wobei jeder Gruppe zwei Runden gespielt hat, so dass jeder Spieler enmal Sender bzw. Empfänger war. Die Natur werde simuliert, indem der Projektleiter in jeder Rune für jede Gruppe einen aus zehn Zetteln zufällige gezogen hat, von denen vier die Aufschrift Prinz und sechs die Aufschrift die Aufschrift echter Frosch hatten, um die Wahrscheinlichkeiten $\eta_{echterFrosch} = 0,6$ und $\eta_{Prinz} = 0,4$ zu erhalten. Das Ergebnis des Zuges wurde dem Sender der Gruppe verdeckt mitgeteilt.

Daraufhin sollte der Sender die Auszahlungen betrachten und sich möglichst ,,geschickt" für ein (tanzen oder quaken) entscheide, das jeweils dem Empfänger mitgeteilt wurde. Dieser sollte nun auch seine möglichen Auszahlung betrachten und unter Berücksichtigung von η und Nutzenmaximierung zwischen küssen und nicht küssen wählen. Weiter sollte er angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit er vermutet, in welchem Entscheidungsknoten er sich befindet würde, wenn er das andere Signal beobachtet hätte. Die Ergebnisse der Runden sind in folgender Tabelle dargestellt:

Runde	Natur	Sender	Empfänger	μ des nicht gesendeten Signals in Prozent
1.	echter Frosch	quaken	nicht küssen	60
2.	echter Frosch	tanzen	nicht küssem	70
3.	Prinz	tanzen	küssen	85
4.	Prinz	quaken	küssen	70
5.	echter Frosch	tanzen	nicht küssen	90
6.	echter Frosch	quaken	küssen	45
7.	echter Frosch	quaken	nicht küssen	65
8.	echter Frosch	tanzen	küssen	20
9.	echter Frosch	tanzen	küssen	25
10.	echter Frosch	quaken	küssen	80

Wir haben als ersten Eindruck, bevor wir mit der Analyse der Gleichgewichtssituationen in diesen Spiel begonnen haben, folgendes beobachtet:

Generell wurde öfter der Typ echter Frosch von der ,,Natur" gewählt, jedoch wurde bei der Wahl der Signale ausgeglichen gespielt. Auf den ersten Blick scheint es also so, dass die Sender ihre Wahl nicht in erster Linie von ihren Typen abhängig gemacht haben. Dies ist ein Ergebnis, mit dem wir nicht gerechnet haben. Auch war es scheinbar für den Empfänger nicht vorrangig, welches Signal er beobachtet hat, da auf jedes dieser Signale in etwa gleich oft mit küssen / nicht küssen reagiert wurde. Wir führen dies nicht nur auf die angegebenen μ_{Signal} zurück, sondern vielmehr auf unterschiedliche Risikobereitschaft oder Ähnliches der unerfahrenen aber dennoch rationalen Spieler zurück. Weiter ist auffallend, dass tendenziell öfter küssen als nicht küssen gewählt wurde, obwohl $\eta(echterFrosch) = 0,6 > 0,4 = \eta(Prinz)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit für den Sender, eine positive Auszahlung zu bekommen, ist vergleichsweise gering.

Nach diesen etwas erstaunlichen Beobachtungen wollen wir nun untersuchen, ob und welche Gleichgewichte gespielt wurde.

Dazu ist es notwendig, alle separierenden und Pooling-Gleichgewichte zu finden. Dabei gehen wir nach obiger Methode vor.

Es gibt kein separiendes Gleichgewicht auf (Tanzen, Quaken) da sich der Empfänger bei Tanzen für nicht küssen entscheidet (Typ 1 = echter Frosch), was ihm die *echt schlechteste* Auszahlung einbringt, d.h. der echte Frosch hat einen Anreiz abzuweichen.

Ebenso gibt es kein separiendes Gleichgewicht auf (Quaken, Tanzen), denn die Prinzessin reagiert bei quaken mit nicht küssen, da
$u_{Prinzen}((Quaken, Tanzen), (nichtküssen, küssen), \mu_{quaken} = 1, \mu_{tanzen} = 0) = 0$
$> -3 = u_{Prinzen}((Quaken, Tanzen), (küssen, küssen), \mu_{quaken} = 1, \mu_{tanzen} = 0)$
und auf Tanzen sicher mit küssen, da sie mit Wahrscheinlichkeit $\mu_{tanzen} = 1$ davon ausgeht, den Prinzen vor sich zu haben. Daraus ergibt sich, dass der echte Frosch abweicht und tanzen wählt, da die Prinzessin dann sicher mit küssen reagiert und
$u_{echterFrosch}((Tanzen, Tanzen), (nichtküssen, küssen, \mu_{quaken} = 1, \mu_{tanzen} = 0) = 15$
$> 0 = u_{echterFrosch}((Quaken, Tanzen), (nichtküssen, küssen), \mu_{quaken} = 1, \mu_{Prinzen} = 0)$
Zusammenfassend gibt es also in diesem Spiel keine separienden Gleichgewichte.

Kommen wir zu den Pooling-Gleichgewichten:
Dann ist $EU_{Prinzessin}(Tanzen|küssen) = 0,6(-3)+0,4(5) = 0,2 > 0 = EU_{Prinzessin}(Tanzen|nichtküssen)$
Die Prinzessin reagiert mit küssen, wenn sie tanzen beobachtet.
Der echte Frosch maximiert bereits seiner Auszahlung und hat daher kein Grund abzuweichen. Der Prinz hat nur dann keinen Grund abzuweichen, wenn die Prinzessin auf Quarken mit nicht küssen reagiert. Dies tut sie genau dann, wenn $EU_{Prinzessin}(Quaken|küssen)$
$\leq EU_{Prinzessin}(Quaken|nichtküssen) \Leftrightarrow$
$\mu_{Quaken}(-3) + (1 - \mu_{quaken})(5) \leq 0$
$\Leftrightarrow -8\mu_{quaken} + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \mu_{quaken} \geq \frac{5}{8}$
Hieraus ergeben sich Pooling-Gleichgewichte, auf (Tanzen, Tanzen):
$[(Tanzen, Tanzen), (nichtküssen, küssen), \mu_{quaken} \in [\frac{5}{8}, 1], \mu_{tanzen} = 0,6]$.
Prüfen wir eventuelle Pooling-Gleichgewichte auf (Quaken, Quaken). Dann liefern analoge Überlegungen:
$EU_{Prinzessin}(Quaken|küssen) = 0,2$
$> 0 = EU_{Prinzessin}(Quaken|nichtküssen) \Rightarrow$
Prinzessin reagiert auf Quaken mit küssen. Dadurch maximiert der Prinz seine Auszahlung und hat daher keinen Grund abzuweichen.
Der Frosch weicht nicht ab, falls die Prinzessin auf Tanzen mit nicht küssen reagiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn:
$\mu_{tanzen}(-3) + (1 - \mu_{tanzen})(5) \leq 0 \Leftrightarrow \mu_{tanzen} \geq \frac{5}{8}$
Daher sind alle Pooling-Gleichgewicht auf (Quaken, Quaken) gegeben durch [(Quaken, Quaken), (küssen, nicht küsen), $\mu_{quaken} = 0,6, \mu_{tanzen} \in [\frac{5}{8}, 1]$
Untersuchen wir, inwiefern unsere Probanden Gleichgewichte im obigen Sinn gespielt haben.

Runde	Natur	Sender	Empfänger	μ des nicht gesendeten Signals in Prozent	Gleichgewicht (ja/nein)
1.	echter Frosch	quaken	nicht küssen	60	nein (da auf quaken mit nicht küssen reagiert wurde)
2.	echter Frosch	tanzen	nicht küssem	70	nein (da aus tanzen mit nicht küssen reagiert wurde)
3.	Prinz	tanzen	küssen	85	ja
4.	Prinz	quaken	küssen	70	ja
5.	echter Frosch	tanzen	nicht küssen	90	nein (da auf tanzen mit nicht küssen reagiert wurde)
6.	echter Frosch	quaken	küssen	45	nein (da $\mu_{tanzen} = 0,45 \notin [\frac{5}{8}, 1]$)
7.	echter Frosch	quaken	nicht küssen	65	nein (da auf quaken mit nicht küssen reagiert wurde)
8.	echter Frosch	tanzen	küssen	20	nein (da $\mu_{quaken} = 0,2 \notin [\frac{5}{8}, 1]$
9.	echter Frosch	tanzen	küssen	25	nein (da $\mu_{quaken} = 0,25 \notin [\frac{5}{8}, 1]$
10.	echter Frosch	quaken	küssen	80	ja

Auf den ersten Blick sieht es si aus, dass unsere Testpersonen überwiegend kein gleichgewicht gespielt haben. Dies hängt jedoch entscheidend mit der Tatsache zusammen, dass die Spieler nach Angaben über den Fall machten mussten, der nicht eingetreten ist. Würde man dies außer Acht lassen, wäre sogar sechs von zehn Fällen (hinzu kommen die Runden 6., 8. und 9.) rationalisierbare Strategienkombinationen gewählt worden, so dass wir behaupten wollen, dass die geringe Anzahl der Gleichgewichte lediglich auf falscher Selbsteinschätzungen zurückzuführen ist. Gehen wir abschließend moch auf ein unserer Meinung nach besonders schönes Gleichgewicht ein: in Runde 3 wählt der Prinz quaken. Die Prinzessin vermutet mit größerer Wahrscheinlichkeit, dass sich um einen Frosch handelt (dem $\mu_(Prinz) = 0,4$), geht das Risiko in Anbetracht maximaler Auszahlung ein und küsst den Sender. Dies führte für beide Spieler zur maximalen Auszahlung.

Abschließend wollen wir einen Einblick darüber geben, wo die Idee der Signalspiele in der Realität eine Rolle spielen.

So kann z.B. ein Arbeiter in einem Vorstellungsgespräch als Sender aufgefasst werden. Nur er kennt genau seine Fähigkeiten und kann den Chef, der dies beobachtet, entscheidet, ob er den Arbeiter einstellt oder nicht. Hier eröffnen sich weitere interessante Fragestellungen, z.B. welcher Ausbildungsniveau für den Sender in gegebenen Situation optimal wäre.
Ein weiteres Anwendungsgebiet könnte der Verkauf einer Firma an Aktienmarkt darstellen. Der Sender ist hier der Unternehmen, der den Wert der Firma kennt. Er wählt als Signal einen Anteil des Unternehmens, das er am Aktienmarkt veräußern will. Der Markt beobachtet diesen Anteil, kennt jedoch den Wert des Unternehmens nicht und entscheidet über die Bewertung der Aktien.
Jedoch muss man berücksichtigen, dass vor allem die Annahme, dass der Empfänger eine exakte Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung hat, mit der die Natur den Typ des Senders festgelegt, unrealistisch ist. Gründe wie diese und Ähnliches ist auschlaggebend dafür, dass Experimente, die in der Realität im Bereich Signalspiele durchgeführt werden, oft nicht den theoretischen Ergebnissen entsprechen.

4 Literaturverzeichnis

- Manfred J. Holler, Gerhard Illing. *,,Einführung in die Spieltheorie"*
  Springer, Berlin, 6. Auflage, 2006

- Klaus M. Schmidt. *,,Spieltheorie"*. Scriptum aus dem Sommersemester 2005

- Walter Schlee. *,,Einführung in die Spieltheorie"*
  Vieweg, 1.Auflage, 2004

- Siegeried K. Berninghaus. *,,Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie"*
  Springer, Berlin, 2.Auflage, 2005