Operations Research
- Im Fokus der Spieltheorie -

Ein Vortrag im Rahmen der Projektarbeit zur Vorlesung „Spieltheorie - Modelle der Entscheidungsfindung und der Evolution“ im Wintersemester 2008/2009

von Daniel Emmrich, Peter Götzinger
&
Alexander Juri

Inhalt

1. Einführung in Operations Research

Operations Research lässt wie folgt definieren:

„Operations Research ist ein auf praktische Anwendung mathematischer Methoden ausgerichteter Wissenszweig und befasst sich mit der Problemanalyse und Vorbereitung optimaler Entscheidung in Organisationen. Operations Research ist geprägt durch die Zusammenarbeit von Mathematik, Wirtschaftswissenschaften und Informatik.“

Quelle: GOR (1998)

➤ Entscheidungsvorbereitung

- ➤ Informationen liefern die Grundlage zur Entscheidungsfindung
- ➤ Die Entscheidung selbst wird unter Berücksichtigung der erhobenen Daten getroffen.

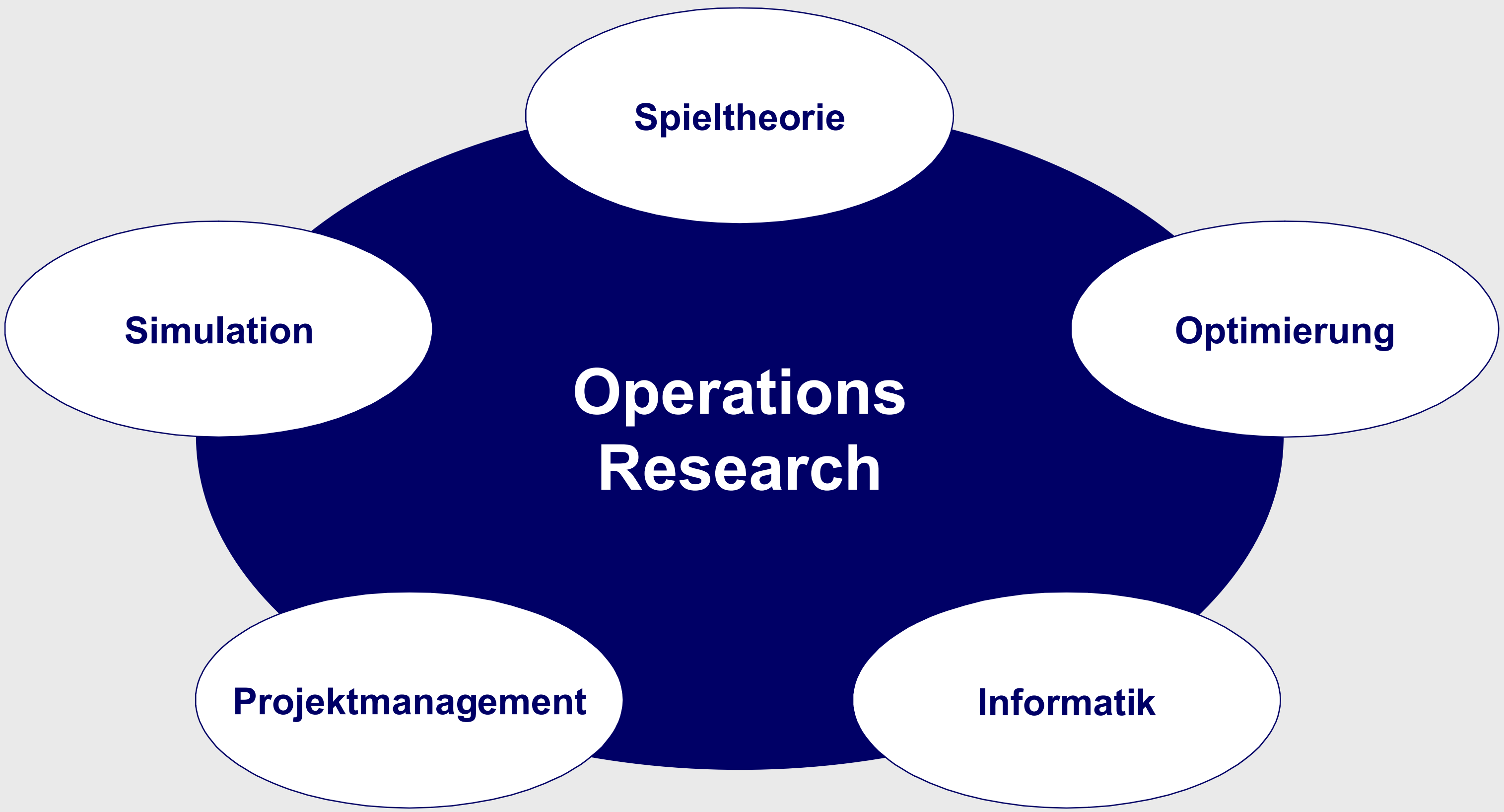
➤ Anstreben einer optimalen Entscheidung

- ➤ Auffinden der optimalen Entscheidung
- ➤ Vergleich der gefundenen Lösungen im Hinblick auf das übergeordnete Ziel (bspw. Gewinnoptimierung)
- ➤ Die gefundene Lösung ist meist eine Kompromisslösung hinsichtlich der verschiedenen Nebenbedingungen der Optimierung

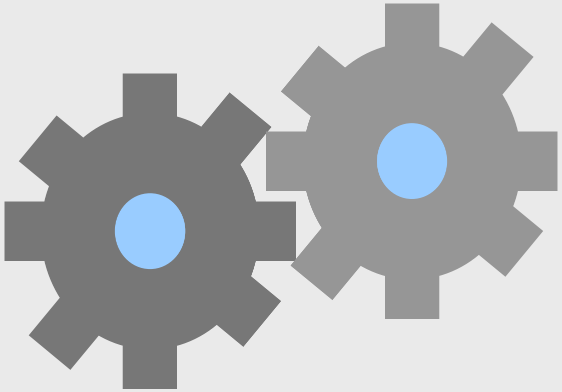
➤ Verwendung mathematischer Methoden

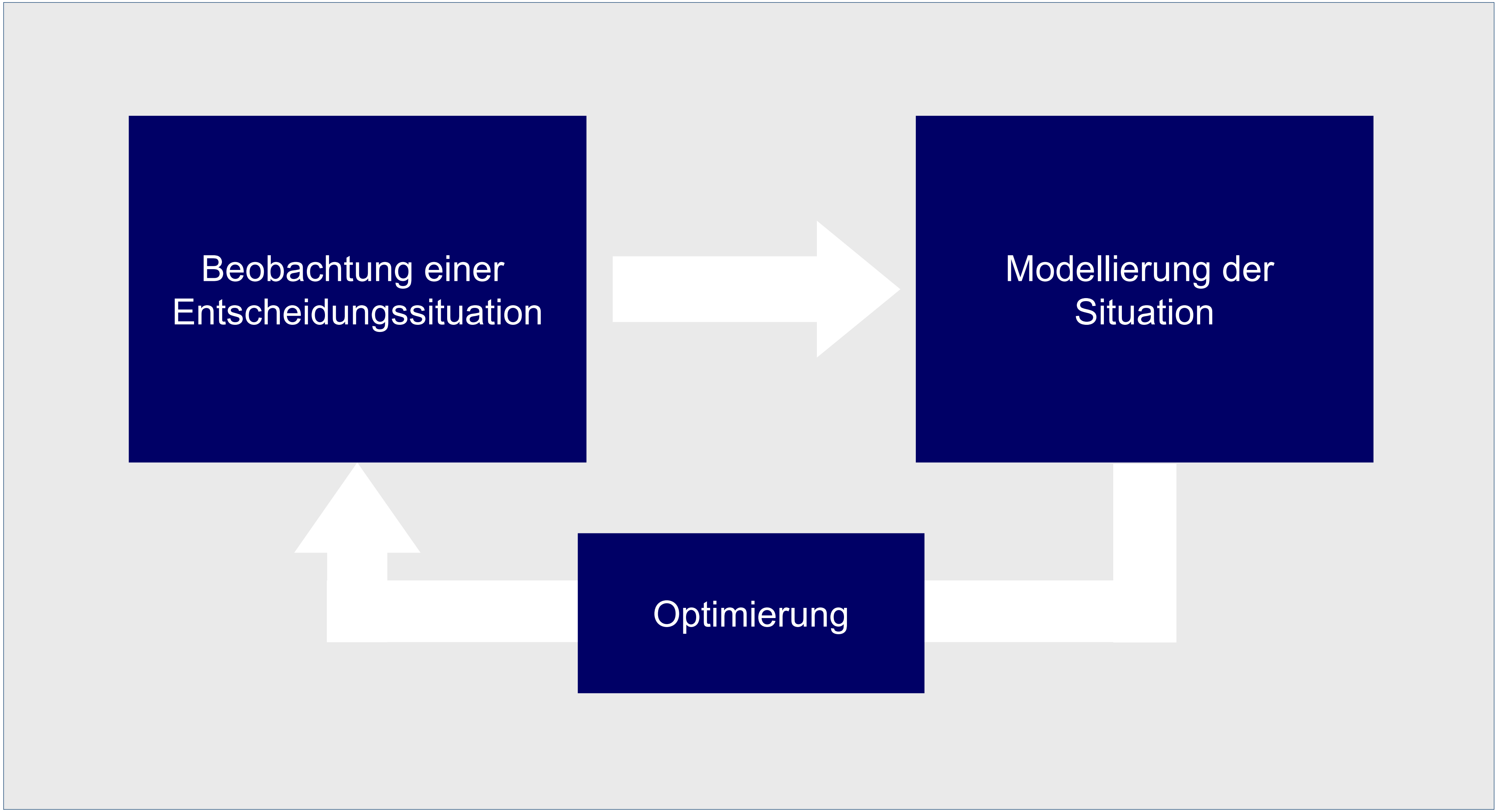
- ➤ Mathematisch Problemformulierung → Formalisierung
- ➤ Nachbildung der Entscheidungssituation als mathematisches Modell
- ➤ Isomorphie
- ➤ Übertragung der Fragestellung auf das Modell
- ➤ Resultat stellt Entscheidungsvorschlag dar

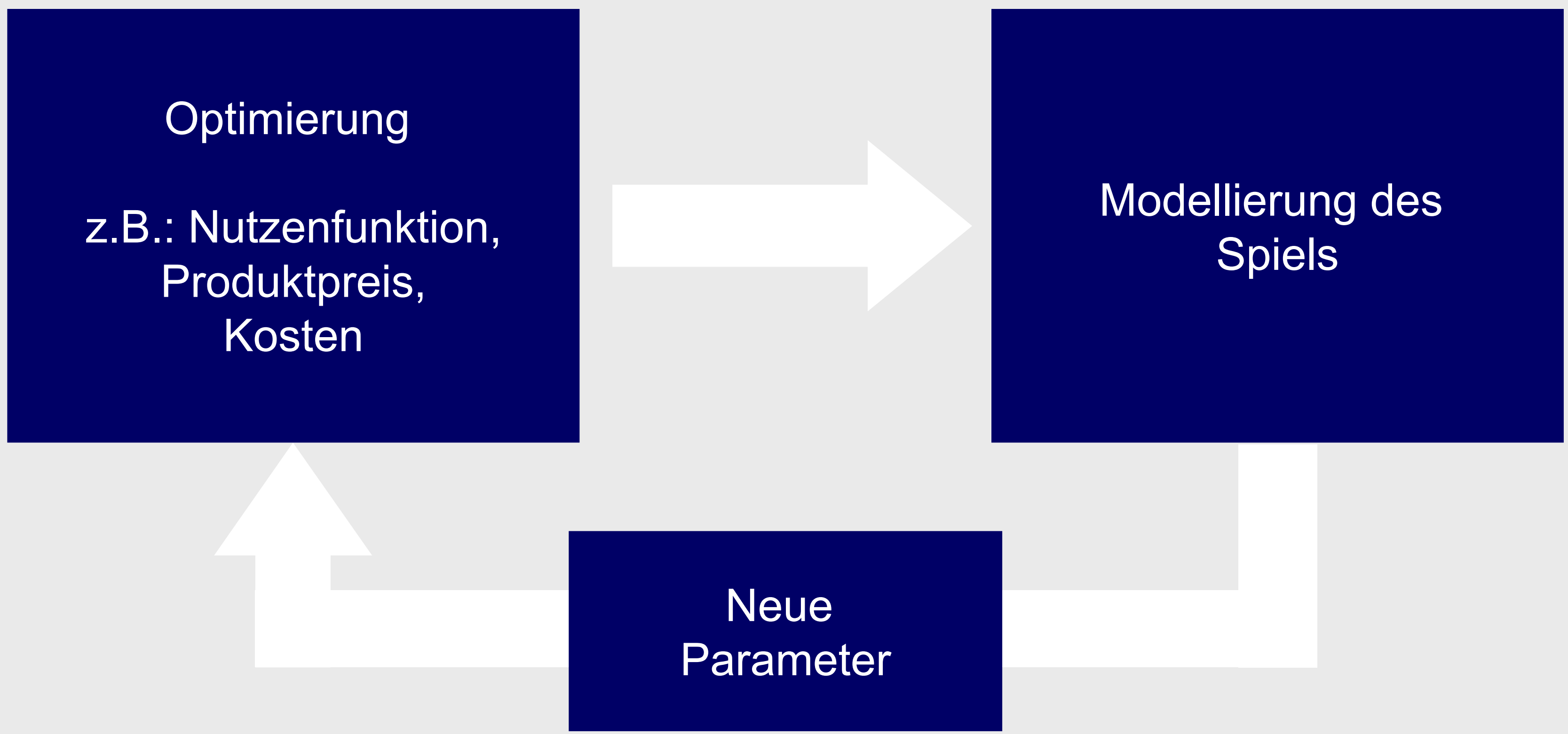
- Operations Research wird von einer Vielzahl von Einflüssen bestimmt



- Operations Research bildet ein großes Zusammenspiel verschiedener Disziplinen. Im Rahmen wird dieser Präsentation wird allerdings nur auf das folgende eingegangen:




Beobachtung einer Entscheidungssituation
Modellierung der Situation
Optimierung


Optimierung
z.B.: Nutzenfunktion, Produktpreis, Kosten
Modellierung des Spiels
Neue Parameter

2. Veranschaulichung durch Beispiele

Beispiel 1

Koalitionsspiel

Inhalt: Dieses Beispiel beschäftigt sich mit einer möglichen Koalitionsbildung der fünf großen deutschen Autobauer im Bereich der Altfahrzeugentsorgung.
Dabei wird geprüft, ob es für die einzelnen Unternehmen rentabel ist gemeinsam eine Entsorgungsanlage zu bauen, oder ob es finanzpolitisch sinnvoller ist, dass jedes Unternehmen eine eigene Anlage baut.

Wir werden die Situation aus Sicht des Herstellers BMW mit Firmensitz in München behandeln.
Weitere Hersteller im Beispiel: Audi, Opel, Mercedes und VW

Beispiel 2

Lineare Optimierung

Inhalt: Dieses Beispiel veranschaulicht die lineare Optimierung anhand der Kostenminimierung einer Ölraffinerie unter mehreren Nebenbedingungen wie Lieferverpflichtungen und Mindest-produktionsmengen.

3.1 Beispiel: Koalitionsbildung der Automobilhersteller

➤ Was sind Koalitionsspiele?

- ➤ Koalitionsspiele sind ein wichtiger Bestandteil der Spieltheorie und sind dem Bereich der *kooperativen Spieltheorie* zuzuordnen.
- ➤ Koalitionsspiele beschäftigen sich immer mit einem möglichen Zusammenschluss mehrerer Spieler zu einer neuen „Spieleinheit".
- ➤ Dabei stellt sich immer eine zentrale Frage: *Welchen Nutzen hat der Spieler beim Eintritt in eine Koalition?*
- ➤ Diese Frage liefert die Handlungsgrundlage in diesen Spielen.
- ➤ Um diese Frage zu beantworten stehen verschiedene Methoden zur Verfügung

  (Bestimmung der Imputationsmenge, Shapley Wert,…)
- ➤ Detailliert werden diese Methoden in unserem Projektskript behandelt.

➡ *Im nachfolgenden Beispiel werden wir die Entscheidung über einen möglichen Koalitionseintritt rechnerisch vorführen. Hierzu sind vorerst keinerlei Vorkenntnisse aus unserem Skript erforderlich.*

Ausgangsituation

- In Deutschland gibt es fünf große Automobilhersteller: Audi, BMW, Mercedes, Opel und VW
- Diese Hersteller stellen 56,8% des deutschen PKW-Bestandes
- In unserem Beispiel treffen wir die Annahme, dass die jeweiligen Hersteller auch für die Verschrottung der Altfahrzeuge verantwortlich sind
- Diese Altfahrzeuge werden in Recyclinganlagen verschrottet

Aufgabenstellung

- Wir befinden uns im Hauptfirmen Sitz der BMW Group in München
- Das Management denkt über eine mögliche Kooperation mit anderen Herstellern bei der Altlastentsorgung nach
- Aufgabe für die „Operations Research – Abteilung“: Prüfung der verschiedenen Koalitionsmöglichkeiten und deren Nutzen.
- Ziel der „Operations Research – Abteilung“: Empfehlung der besten Handlungsalternative

Genaue Vorgehensweise

- Beschaffung von allgemeiner Information über das gestellte Problem
- Genaue Identifizierung der Problemstellung
- Beschaffung von detaillierten Informationen zur Problemstellung
- Mathematische Formulierung des Problems durch Aufstellung der Nutzenfunktion und Optimierung selbiger
- Berechnung der mathematischen Lösung
- Aus dem mathematisch bestimmten Resultat folgt die Ableitung einer Empfehlung für das Management

➡ *Dieses Vorgehen wird auf den folgenden Folien Schritt für Schritt vorgeführt.*

LMU

Beispiel Koalitionsbildung der Automobilhersteller

Mathematisches Institut

➤ Beschaffung von allgemeiner Information über das gestellte Problem

Tabelle mit den Bestandsanteilen der deutschen Automobilhersteller:

Hersteller	Anteil–Bst.	Anzahl	Anzahl Alt	Anteil–Alt*
Audi	6,1 %	3,355 Mio.	384300	10,74 %
BMW	6,5 %	3,575 Mio.	409500	11,44 %
Mercedes	9,1 %	5,005 Mio.	573300	16,02 %
Opel	13,8 %	7,590 Mio.	869400	24,30 %
VW	21,3 %	11,715 Mio.	1341900	37,50 %
Summe 1	56,8 %	31,240 Mio.	3578400	100,00 %
Sonstige	43, 2%	23,760 Mio.	2721600	-
Summe 2	100,0 %	55,000 Mio.	6300000	-

* Da ausschließlich deutsche Hersteller relevant sind, wurde Sonstige hier nicht mit ein bezogen. Dieser Wert wird im weitern Verlauf mit p_i bezeichnet.

Geographische Situation:

➡ *Überblick über den deutschen Automobilbestand, sowie Veranschaulichung der geographischen Gegebenheiten.*

Quelle: Kraftfahrt Bundesamt bzw. Googlemaps

➤ Genaue Identifizierung der Problemstellung

- ➤ Die Entsorgung ist mit Kosten verbunden
- ➤ Die aufzustellende Nutzenfunktion muss demnach die Kosten wiedergeben
- ➤ Ziel: Bestimmung des Minimums der Kostenfunktion
- ➤ Resultat: Handlungsvorschlag für die finanzpolitisch besten Alternative.

➤ Beschaffung von detaillierten Informationen zur Problemstellung

- Recherche bzgl. der möglichen Anlagen, die zum Bau zur Verfügung stehen. Ermittlung von Kapazität, Bau- und Unterhaltskosten, sowie die Nutzungsdauer:

Anlage	Kapazität	Baukosten	Unterhalt	Nutzungsdauer
Anlage A	600 000	25 Mio. €	0,7 Mio. €	10 Jahre
Anlage B	900 000	30 Mio. €	1,2 Mio. €	10 Jahre
Anlage C	1 900 000	45 Mio. €	2,0 Mio. €	10 Jahre
Anlage D	3 700 000	50 Mio. €	2,8 Mio. €	10 Jahre

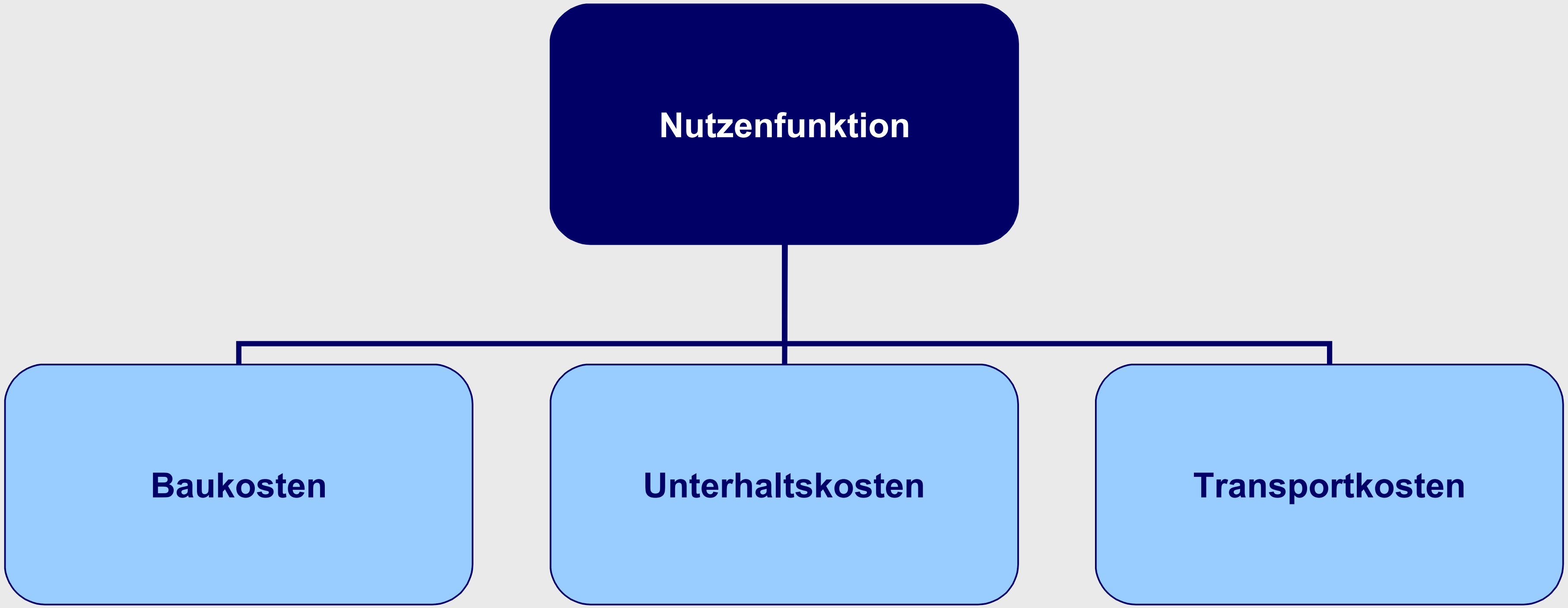
➤ Beschaffung von detaillierten Informationen zur Problemstellung

- Erstellen einer Entfernungsmatrix zwischen den einzelnen Automobilhersteller in Deutschland:

	Audi	BMW	Mercedes	Opel	VW
Audi	0 km	80 km	228 km	336 km	526 km
BMW	80 km	0 km	232 km	411 km	600 km
Mercedes	228 km	232 km	0 km	195 km	545 km
Opel	336 km	411 km	195 km	0 km	391 km
VW	526 km	600 km	545 km	391 km	0 km

➤ Beschaffung von detaillierten Informationen zur Problemstellung

- ➤ Recherche bzgl. der verschiedenen Einflussfaktoren auf die aufzustellende Nutzenfunktion



➤ Mathematische Formulierung des Problems durch Aufstellung der Nutzenfunktion

- Aufgrund der vorhanden Informationen lässt sich folgende Nutzenfunktion aufstellen:

$$u_i = c_{Bau} \cdot p_{i_B} + c_{Unterhalt} \cdot p_{i_B} \cdot t + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Entfernung} \cdot t$$
$$\text{mit } i \in M = \{\text{Audi, BMW, Mercedes, Opel, VW}\}$$

- Dabei stellt p_{i_B} den umgerechneten Marktanteil der einzelnen Koalitionsteilnehmer jeder einzelnen Koalition da. Im Detail errechnet sich dieser Wert wie folgt:

$$p_{i_B} = \frac{q_i}{\min q_b} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\min q_b}}$$
$$\text{mit } b \in B = \{\text{Koalitionsteilnehmer}\} \quad \text{und } k \in B$$

- Nachdem die Entfernung die einzige Variable ist, die uns nicht bekannt ist, bestimmen wir einen Radius in dem man bereit wäre eine Koalition einzugehen.

➡ *Die Werte p_{i_B} für können, um die spätere Rechnung schneller durchzuführen, bereits im Vorfeld ermittelt werden.*

➡ *Für $c_{Transport}$ wird ein Wert von 0,065 €/km Auto angenommen*

➤ Mathematische Lösung

- Aufgrund der Berechnung kommt man zu dem Schluss, dass sich nur eine Koalition zwischen BMW und Audi zum Nutzen beider ergeben würde.
- Alle anderen Koalition kommen nicht zustande, da die Radien für die Erbauung einer gemeinsamen Anlage keine Schnittmengen aufweisen.
- Da unsere Berechnungen allerdings einen Kostenparameter enthalten, der die Transportkosten bestimmt, wird man bei Veränderung dieses Parameters feststellen, dass sich bei minimaler Erhöhung von 0,005 € das Gesamtergebnis bereits verändert und es dann zu gar keiner Koalitionsbildung kommt.

➡ **Einzige Koalition die unser mathematisches Modell bestimmt hat ist eine Koalition zwischen Audi und BMW.**

➤ Ableitung einer Empfehlung für das Management:

- Nach den Berechnungen kann es nur eine Koalition geben. Diese Koalition sollten Audi und BMW eingehen.
- Das jeweilige Management der beiden Unternehmen sollten in Verhandlung über den Bauplatz treten. Als bester Bauplatz aus Sicht von BMW würde sich ein Ort eigenen, der auf einer direkten Verbindungslinie zwischen München und Ingolstadt mit einer Entfernung von 33,28 km vom Werk entfernt liegt. Allerdings sind auch andere Bauplätze innerhalb eines Entfernungsintervalls von 33,28 km bis zu 38,79km geeignet.
- Es gilt allerdings zu beachten, dass bei einer Änderung des Preisparameters (z.B. durch Spritpreiserhöhung) ein Anstieg von 0,005 € genügt um die beschriebene Koalition nicht mehr rentabel zu machen.
- Da wir insgesamt einen Zeitraum von 10 Jahren betrachtet haben, sollte man sich sehr sicher sein, dass in diesem Zeitraum der eben beschriebene Parameter keine Änderungen durchläuft.

➡ **Die Koalition kann aus rechnerischer Sicht empfohlen werden, allerdings mit der Einschränkung, dass sich schon bei geringen Kostenerhöhungen eine Koalition nicht mehr sinnvoll ist.**

3.2 Beispiel: Lineare Programmierung

➤ Lineare Programmierung und Optimierung:

- Was ist ein Optimierungsproblem?
- Beispiel aus der Ölraffinierung: Herstellung von schwerem (S), mittelschwerem (M) und leichtem Öl (L) durch zwei Crackverfahren möglich
- 10 ME Rohöl ergeben in Crackprozess 1: 2 ME S, 2 ME M, 1 ME L; Kosten 3 GE
- 10 ME Rohöl ergeben in Crackprozess 2: 1 ME S, 2 ME M, 4 ME L; Kosten 3 GE
- Vorgehensweise: mathematische Formulierung des Problems => lineares Optimierungsproblem: Einführen zweier Variablen, die das Produktionsniveau der beiden Prozesse beschreiben => Aufstellen des Modells => Lösen des Modells
- Verschiedene Lösungsmöglichkeiten: grafische Lösung, Annäherung, Simplex-Verfahren
- Ökonomische Analyse der Problematik in diesem speziellen Beispiel

Lineare Optimierung

13. Januar 2009

Was ist ein Optimierungsproblem? Beispiel aus der Ölraffinierung:

Ölraffinerien:

- angeliefertes Rohöl wird durch Anwendung von chemischen und physikalischen Verfahren in Komponenten zerlegt
- Ausbeute an Komponenten hängt von Crackprozess ab
- Raffinerie stellt aus Rohöl drei Komponenten (schweres Öl S, mittelschweres Öl M, leichtes Öl L) her
- 2 Crackverfahren zur Verfügung hat zwei Crackverfahren zur Verfügung

- 10 ME Rohöl ergeben in:

Crackprozess 1:

2 ME S

2 ME M

1 ME L

Kosten: 3 GE

Crackprozess 2:

1 ME S

2 ME M

4 ME L

Kosten: 5 GE

Aufgrund von Lieferverpflichtungen muss die Raffinerie folgende Mindestproduktion herstellen:

3 ME S

5 ME M

4 ME L

Kosten: 3 GE

- Mengen sollen so kostengünstig wie möglich produziert werden.

=> mathematische Formulierung notwendig

- Crackprozesse unabhängig voneinander; können mit jeder Rohölmenge beschickt werden

- x_1 und x_2 beschreiben das Produktionsniveau der beiden Prozesse

- jeder Vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0$, beschreibt ein mögliches Produktionsniveau der beiden Prozesse

- Angenommen durch $(x_1, x_2) \geq 0$ sei ein Produktionsniveau beschrieben, dann folgt aus den technologischen Bedingungen der beiden Crackprozesse, dass sich der Ausstoß an schwerem Öl S auf $2x_1 + x_2$ ME S, $2x_1 + 2x_2$ ME M und $x_1 + 4x_2$ ME L beläuft

- Kosten $z = 3x_1 + 5x_2$ GE

- Lieferverpflichtungen: Mindestmengen an S, M und L müssen produziert werden:

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$
$$2x_1 + x_2 \geq 5$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 4$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Die Aufgabe besteht nun darin, unter allen Vektoren $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, die die fünf Ungleichungen erfüllen, einen Vektor zu finden, der minimale Kosten verursacht, d.h. bei dem

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

einen möglichst kleinen Wert annimmt, was bedeutet:

$$\min 3x_1 + 5x_2$$

$\Rightarrow$ **lineares Optimierungsproblem** unter Nebenbedingungen

$$(1)\colon\ 2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$(2)\colon\ 2x_1 + x_2 \geq 5$$

$$(3)\colon\ x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$(4)\colon\ x_1 \geq 0$$

$$(5)\colon\ x_2 \geq 0$$

- $3x_1 + 5x_2$ **Zielfunktion** des Problems

- Jeder Vektor, der (1),...,(5) erfüllt, heißt **zulässige Lösung** des Problems.

Dieses lineare Programm kann nun auf unterschiedliche Art und Weise gelöst werden:

- grafische Lösung, da man in diesem Problem nur zwei Variablen hat

- Zielfunktion ist keine Gerade

- z.B. $x = (3, 2)$ erfüllt alle Ungleichungen

$\Rightarrow$ Zielfunktionswert = Gesamtkosten: 19

- z.B. $x* = (2, \frac{1}{2})$erfüllt ebenfalls die Ungleichungen

$\Rightarrow$ Verbesserung der Lösung, da $3x*_1 + 5x*_2 = 8,5 < 19$.

Wie erkennt man nun, ob die Lösung noch weiter verbessert werden kann, oder ob sie bereits optimal ist?

- Man kann alle Ungleichungen skalieren

- Erfüllt ein Vektor zwei Ungleichungen, so erfüllt er auch die Summe der beiden Ungleichungen

Addiere man z.B. Ungleichung (1) zu Ungleichung (3), so erhält man

$$3x_1 + 5x_2 \geq 7$$

$\Rightarrow$ untere Schranke für das Minimum

- Da unsere Ungleichungen alle in der $\geq$-Form geschrieben sind, dürfen wir nur positiv skalieren, denn zwei Ungleichungen $a_1x_1 + a_2x_2 \leq \alpha$ und $b_1x_1 + b_2x_2 \geq \beta$ kann man nicht addieren.

Gibt jede beliebe Skalierung und Addition eine untere Schranke?

Nein:

$$4x_1 + 3x_2 \geq 8$$

linke Seite der Ungleichung kann man nicht zum Abschätzen der Zielfunktion benutzen

Betrachte man nun das 1,5-fache der Ungleichung (2), so erhält man

$$3x_1 + 3x_2 \geq 7,5.$$

$\Rightarrow$ Ist $3x_1 + 3x_2 \geq 7,5$, dann erst recht $3x_1 + 5x_2 \geq 7,5$, da $x_2 \geq 0$.

Allerdings liefert uns diese Erkenntnis ein neues mathematisches Problem:

Wir suchen nicht negative Multiplikatoren der Ungleichungen (1),(2),(3) mit gewissen Eigenschaften. Multiplizieren wir (1) mit y_1, (2) mit y_2 und (3) mit y_3, so darf die Summe $2y_1 + 2y_2 + y_3$ nicht den Wert des ersten Koeffizienten der Zielfunktion (also 3) überschreiten. Analog darf die Summe $y_1 + 2y_2 + 4y_3$ nicht den Wert 5 überschreiten. Außerdem sollen die y_i nicht negativ sein. Ferner soll die rechte Seite der Summenungleichung so groß wie möglich werden.

Die rechte Seite kann man durch $3y_1 + 5y_2 + 4y_3$ berechnen

$\Rightarrow$ folgende Aufgabe muss gelöst werden: Bestimme

$$\max 3y_1 + 5y_2 + 4y_3$$

unter den Nebenbedingungen:

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3$$
$$y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 5$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Solange man nur zwei Variablen hat, ist eine anschauliche grafische Lösung oft von Vorteil

Gibt es immer eine optimale Lösung? Nein, da das Problem auch unbeschränkt sein kann (siehe Skript)

Wie geht man nun vor?

Möglichkeit: Simplex-Verfahren (siehe Herleitung und Anwendung im Skript)!

Kerngedanke: berechne Lösung, die im Durchschnitt von n-Hyperebenen liegt

$\Rightarrow$ versuche weitere derartige Punkte zu produzieren und zwar dadurch, dass man jeweils nur eine Hyperebene durch eine andere austauscht und so von einem Punkt auf „zielstrebige“ Weise über „Nachbarpunkte“ zum Optimalpunkt gelangt

Weitere Gedanken von OR-Fachleuten eines Ölkonzerns:

- Ist es überhaupt sinnvoll, die drei Ölsorten S, M, L selbst herzustellen?

- Ist es vielleicht besser, die benötigten Ölmengen auf dem Markt zu kaufen?

- Welche Preise würden sie auf dem Markt gerade noch bezahlen, ohne die Produktion selbst aufzunehmen?

- Bei welchen Marktpreisen für S, M, L lohnt sich die Eigenproduktion noch?

Preise für eine Mengeneinheit von S, M, L: y_1, y_2, y_3

$\Rightarrow$ beim Ankauf der benötigten Mengen für S, M, L genau $3y_1 + 5y_2 + 4y_3$ GE zu bezahlen

Der erste Crackprozess liefert bei 10 ME Rohöleinsatz 2 ME S, 2ME M und 1 ME L und verursacht 3 GE Kosten. Würden wir den Ausstoß des ersten Crackprozesses auf dem Markt kaufen, so müssten wir dafür $2y_1 + 2y_2 + y_3$ GE bezahlen. Ist also $2y_1 + 2y_2 + y_3 > 3$, so ist es auf jeden Fall besser, den Crackprozess 1 durchzuführen, als auf dem Markt zu kaufen.

Analog zweiten Prozess: Erfüllen die Marktpreise die Bedingung $y_1 + 2y_2 + 4y_3 > 5$, so ist die Durchführung des Crackprozesses 2 profitabel.

Nur solche Preise y_1, y_2, y_3, die die Bedingungen

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3$$
$$y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 5$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

erfüllen, können also das Management veranlassen, auf dem Markt zu kaufen.

Der beim Kauf der durch die Lieferverträge benötigten Mengen zu bezahlende Preis beläuft sich auf

$$3y_1 + 5y_2 + 4y_3.$$

Maximierung unter obigen Nebenbedingungen $\Rightarrow$ Preise

$y*_1 = 0, y*_2 = \frac{7}{6}, \frac{2}{3}$, die die Eigenproduktion gerade noch profitabel erscheinen lassen $\Rightarrow$ **Schattenpreise**

- weniger Entsorgungsprobleme Interpretation:

- Annahme: Ölfirma hat die Prozessniveaus $x*_1 = 2, x*_2 = 0,5$ gewählt;

- Mineralölhändler möchte 1 ME leichten Öls L zusätzlich kaufen

- Ist der Marktpreis mindestens $\frac{2}{3}$ GE pro ME L, wird die Firma das Geschäft machen, andernfalls wäre es besser, die zusätzliche Einheit nicht selbst zu produzieren.

- Würde Mineralölhändler 1 ME schweres Öl nachfragen, würde die Firma bei jedem Preis verkaufen, denn sie hat davon zu viel.

4. Ausblick und Bilanz des Projekts

➤ Stärken, Schwächen, Chancen und Risiken der spieltheoretischen Anwendungen im Bereich Operations Research:

Stärken

- Objektive Analyse eines Problems
- Vergleichbarkeit
- Senken der Transaktionskosten (Durchsetzungskosten)

Schwächen

- Mögliche Instabilität der Nutzenfunktion
- Absolute Rationalität in der Realität nicht gewährleistet.
- Unvollkommene Information
- GG in Gemischten Strategien nicht Aussagekräftig

Chancen

- Einschätzung der Konkurrenz
- Optimaler Kompromiss

Risiken

- Fehleinschätzung wegen vermeintlicher Objektivität
- Falsches Modell
- Berechenbarkeit

Abschließend bedanken wir uns

für Ihre

Aufmerksamkeit und Ihr Interesse