Poker
—
Einführung und vereinfachtes Spiel

Anna Hecht,
Bernhard Karl,
Benthe Porstein,
Patrick Rauschecker und
Sebastian Soika

27. Januar 2009

Projektarbeit
zur Vorlesung Spieltheorie
im Wintersemester 2008/2009

Mathematisches Institut
Ludwig–Maximilians–Universität
München

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Glücksspiel Poker hat in letzter Zeit großen Zulauf bekommen. Die bekannteste Variante ist das Texas-Hold'Em, welches wir in dieser Projektarbeit beschreiben, um einen grundlegenden Einstieg in das Pokerspiel zu gewährleisten. Wie bei jedem Glücksspiel gibt es in der Literatur zahlreiche Versuche durch spieltheoretische Untersuchungen optimale Strategien zu entwickeln. Aufgrund der vielfältigen Varianten und vor allem der hohen Komplexität der einzelnen Pokervarianten gibt es aber kaum vollständige Lösungen für dieses Spiel.

Um jedoch grundlegende Entscheidungen im Poker treffen zu können analysieren wir zwei stark vereinfachte Pokerspiele, die in der Realität nicht gespielt werden. Dabei soll ein Verständnis für einfache Situationen entstehen, die sich auf das reale Pokerspiel übertragen lassen. Diese Untersuchungen sind spieltheoretisch umfassend erarbeitet und helfen in der Entscheidungsfindung. Sie lassen sich auch auf jede reale Pokervariante übertragen, können aber aufgrund des immensen Rechenaufwands nur schwer angewandt werden.

In den vereinfachten Spielversionen beschränken wir uns zunächst auf eine rein rationale Spielweise. Im weiteren Verlauf nehmen wir auch das Spielprinzip des Bluffens mit in die Untersuchung auf.

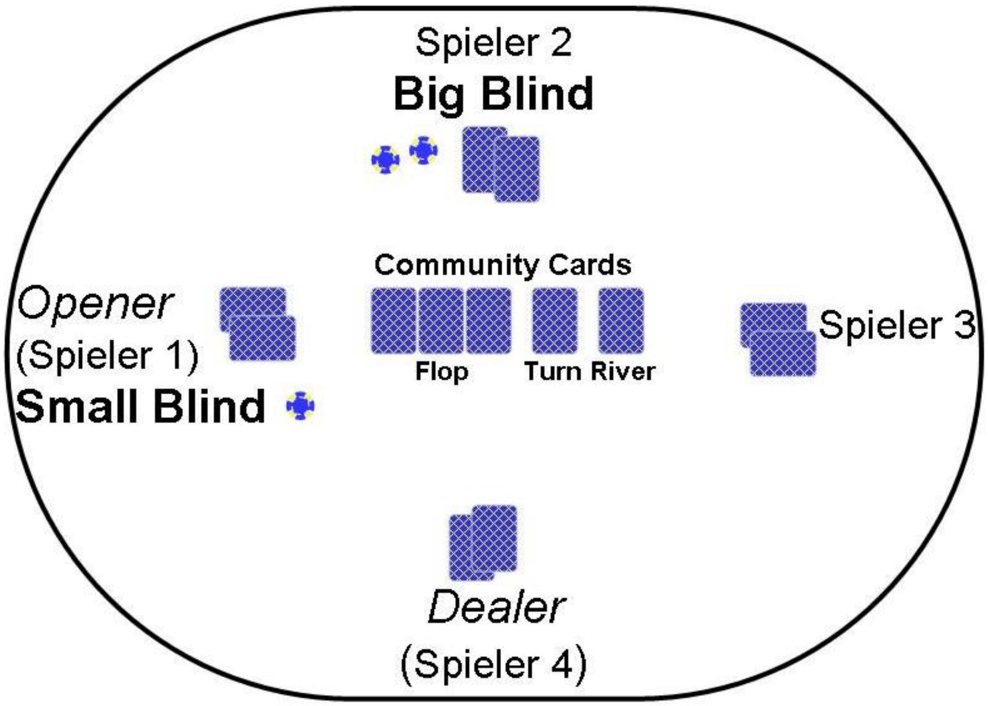
Diese Projektarbeit soll einen Einblick in die Komplexität des Pokerns geben und Denkanstöße für eine erfolgreiche Spielweise eröffnen.

Kapitel 2

Texas-Hold'Em

2.1 Der Spielablauf beim Texas-Hold'Em

Zwei oder mehr Spieler sitzen um einen Tisch und bestimmen zunächst einen *Dealer* für die Partie. Der Dealer ist für das Mischen und das Ausgeben der Karten zuständig. Dabei teilt er nicht nur jedem Spieler sein Blatt (2 Karten) zu, sondern er legt auch die 5 Karten *(Community Cards)*, die in der Mitte des Tisches jedem zugänglich sind und deckt diese im Laufe des Spiels auf. Zur Linken des Dealers befindet sich der *Opener*, der den im vorhinein vereinbarten *Small Blind* setzen muss. Zu dessen Linken wiederum befindet sich der Spieler, der den *Big Blind* setzt. Ein Big Blind ist genau das Doppelte des Small Blinds. Die Verteilung der Aufgaben rotiert während der Partien im Uhrzeigersinn, so dass jeder der Spieler diese Positionen bekleiden kann. Bei Anfängern ist es sinnvoll, die für die Aufgaben Zuständigen zu kennzeichnen (i.d.R. durch einen Dealerbutton), um Irritationen zu vermeiden.
Die Einsätze einer Partie gestalten sich folgendermaßen:
Zu Beginn einer Spielrunde werden zunächst die Blinds gesetzt, das heißt ein vorher bestimmter Minimaleinsatz.



Der auf den Big Blind folgende muss anhand seiner Karten nun entscheiden ob er:

- *fold*et, also aussteigt,
- *call*t, also bei dem Einsatz seines Vorgängers mitgeht oder
- *raise*d, also den Einsatz seines Vorgängers und noch mehr setzt (mindestens den Big Blind).

Generell gilt, dass jeder Spieler mindestens den gleichen Betrag wie sein Vorgänger setzen muss. Will oder kann er das nicht, scheidet er aus der Partie aus. Eine Setzrunde endet mit dem Big Blind, wenn kein Spieler raised. Sollte einer der Spieler raisen, endet die Setzrunde mit dem Spieler vor ihm. Alle Spieler, die jetzt noch im Spiel sind, haben also den selben Einsatz gebracht.

In der nächsten Spielphase deckt der Dealer (Geber) nun die ersten 3 Karten der Community Cards auf (*Flop*), die in der Mitte des Tisches liegen. Der Small Blind beginnt die neue Phase, muss aber im Gegensatz zur Anfangsrunde nicht setzen. Er kann entweder folden, *checken* - sprich an den nächsten Spieler weitergeben ohne zu setzen - oder aber *betten*, d.h. wie vorher einen Einsatz machen, der mindestens so hoch ist wie der Big Blind.

Alle folgenden Spieler haben in dieser neuen Phase die selben Möglichkeiten wie der Small Blind, sie können aber wie in der ersten Setzrunde auch noch raisen. Checken können sie nur, wenn der vorhergehende Spieler dies ebenso tat. Falls im Verlauf dieser Runde des Spiels alle Spieler am Zug waren und nicht noch einmal geraised wurde, deckt der Dealer die vierte Karte der Community Cards (*Turn*) in der Mitte des Tisches auf.
Der Rundenverlauf gestaltet sich wie in der vorherigen. Nach Ende dieser Phase wird schließlich die letzte der fünf Board Cards, der (*River*), aufgedeckt und eine letzte Runde beginnt. Danach endet das Pokerspiel und jeder der sich noch im Spiel befindlichen Personen kann seine Karten zeigen, muss jedoch nicht. Nur der Spieler, der den letzten Einsatz tätigt, ist gezwungen, seine Karten aufzudecken.

Poker Hand	Beschreibung	Beispiel	Kombination
Royal Flush	Strasse in einer Farbe bis Ass	10♣ J♣ Q♣ K♣ A♣	4.324
Straight Flush	Strasse in einer Farbe	8♦ 9♦ 10♦ J♦ Q♦	37.260
Four of a kind	Vier Karten gleichen Werts	J♦ J♥ J♠ J♣	224.848
Full House	Ein Drilling und ein Paar	K♥ K♠ K♦ 7♣ 7♥	3.473.184
Flush	Fünf Karten in einer Farbe	3♦ 5♦ 8♦ J♦ A♦	4.047.644
Straight	Fünf Karten in einer Reihe	7♣ 8♥ 9♣ 10♠ J♦	6.180.020
Three of a kind	Drei Karten gleichen Werts	K♣ K♠ K♥	6.461.620
Two Pairs	Zwei Paare	Q♣ Q♣ 7♠ 7♥	31.433.400
One Pair, $\geq$ B	Zwei Karten gleichen Werts	J♦ J♣	18.188.280
One Pair, $<$ B	Zwei Karten gleichen Werts	9♥ 9♠	40.439.520
High Card	Nur die höchste Karte	A♣	23.294.460
Insgesamt			133.784.560

Variante mit Limit:
Bei Limits werden zwei Arten unterschieden: Die verbreiteste Form des Limits legt fest, wie viel ein Spieler maximal pro Spielphase setzen darf. Ihm steht pro Phase des Spiels ein fester Betrag zur Verfügung. Bei Anbruch einer neuen Phase hat er wieder den gleichen Gesamteinsatz zur Verfügung. Angenommen das Limit sind 50 Euro, die in einer Spielphase bereits gesetzt wurden. Hat man noch einen Zug, so muss man ohne erneutes Setzen die Runde durchlaufen. Beginnt eine neue Spielphase durch die Möglichkeit des Checkens, hat man wiederum 50 Euro als Einsatz zur Verfügung.
Eine weitere, unbekanntere Form des Limits legt fest, um wieviel ein Spieler maximal raisen darf. Hat man zum Beispiel festgelegt, dass maximal in 5 Euro Schritten erhöht werden darf, so ist ein höherer Einsatz als x plus 5 Euro nicht möglich.

2.2 Spieltheoretische Einordnung

Poker ist im Gegensatz zu Schach oder Dame ein Spiel mit unvollständiger Information. Trotzdem entzieht es sich nicht der mathematischen Betrachtung. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie und spieltheoretischer Ansätze läßt sich Poker tatsächlich mathematisch modellieren. Das Spiel ist jedoch ungeheuer komplex, so dass es eine mathematische Lösung für dieses Spiel nur für begrenzte Spezialfälle gibt.

	deterministisch	mit Zufall
vollkommen	Schach	Kniffel
nicht vollkommen	Schiffe versenken	Poker

Beim Poker handelt es sich um ein dynamisches Spiel (rundenbasiert) mit unvollkommener Informationen und Zufallsereignissen (siehe Tabelle). Poker ist dabei ein strikt kompetatives Nullsummenspiel (pro Runde kann nur ein Spieler gewinnen; sein Gewinn ist der kumulative Verlust der anderen Spieler) und nicht symmetrisch, da die zu wählenden Handlungsalternativen von der Position am Tisch abhängen(vgl. Kuhn-Poker Kapitel 4).
Diese Klassifkation trifft auf die meisten Kartenspiele zu. Das Zufallsmoment resultiert dabei aus dem Mischen der Karten und der anschließenden zufälligen Verteilung. Durch das Halten der Karten auf der Hand schützt jeder Spieler seine privaten Informationen, dadurch ist das Spiel unvollkommen.
Für die Darstellung einer solchen Klasse von Spielen ist am besten die extensive Form geeignet, da die Modellierung von zugbasierten Entscheidungen auf diese Weise am besten umgesetzt werden kann.

Die tiefgehendsten mathematischen Resultate zu Texas-Hold'Em liegen für das Heads-Up-Spiel (nur zwei Spieler) vor. Dennoch ist anzumerken, dass beim Texas-Hold'Em mit allen Karten und nur zwei Spielern ein riesiger Spielbaum benötigt wird und die Strategien der Spieler eine Vielzahl an Parametern beinhalten. Bei dieser Variante ist die Anzahl der Parameter schon von der Größenordnung 10^{18}.
Die Komplexität von Texas-Hold'Em ist wesentlich größer, wenn mehr Spieler involviert sind.

Kapitel 3

Das vereinfachte Spiel

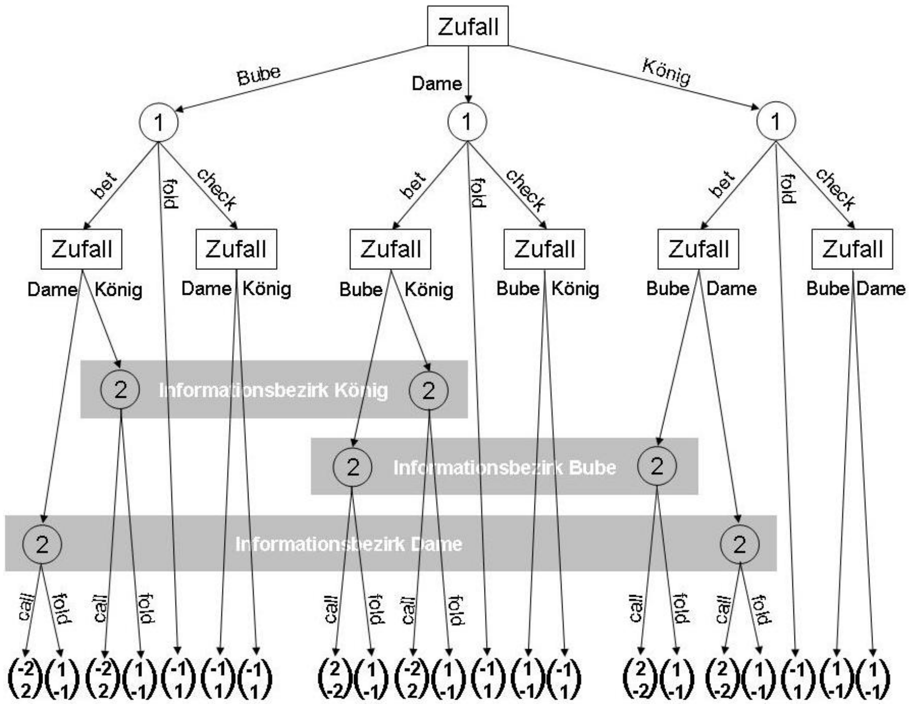
3.1 Der Ablauf des Spiels

Wir definieren nun ein einfaches Pokerspiel für zwei Spieler, den Opener (Spieler 1) und den Dealer (Spieler 2). Der Blind ist für beide Spieler gleich und beträgt 1 Geldeinheit (GE). Gespielt wird mit drei Karten, nämlich einem Buben(B), einer Dame(D) und einem König(K), wobei der Bube die niedrigste und der König die höchste Karte ist. Der Dealer teilt dem Opener und sich selber verdeckt je eine Karte aus.
Nun entscheidet sich der Opener, ob er 1 GE *bettet* und den Pot damit auf 3 GE erhöht. In diesem Fall hat der Dealer die Möglichkeit zu callen (Pot: 4 GE) oder zu folden. Im zweiten Fall verliert er das Spiel immer und der Opener erhält den Pot (3 GE), also seinen Einsatz (2 GE) plus den **Gewinn von 1 GE**. Callt der Dealer, so kommt es zum Showdown. Der Spieler mit der höheren Karte gewinnt.

Wenn der Opener *checkt*, so kann der Dealer (in diesem Spiel) nicht raisen und es kommt direkt zum Showdown. Auch hier gewinnt der Spieler mit der höheren Karte.

Der Opener könnte auch schon zu Beginn *folden* (anstelle von betten oder checken), würde damit unabhängig von seiner Karte aber immer verlieren (unrealistisch).

Anschaulich wird dieses in dem nachfolgenden Spielbaum, wobei die Auszahlungen der reine Gewinn ist (also ohne den eigenen Einsatz). Der obere Wert ist die Auszahlung des Openers (Spieler 1), der untere Wert die Auszahlung des Dealers (Spieler 2):



ZUSAMMENFASSUNG:

- Foldet der Opener, so verliert er immer.
- Checkt der Opener, so kommt es sofort zum Showdown (weil der Dealer nicht raisen kann).
- Im Falle eines Bets vom Opener kann der Dealer nun nur zwischen fold und call wählen:
  - Foldet der Dealer bekommt der Opener den Pot.
  - Callt der Dealer, so kommt es zum Showdown, d.h. der Spieler mit der höheren der beiden Karten gewinnt den Pot.

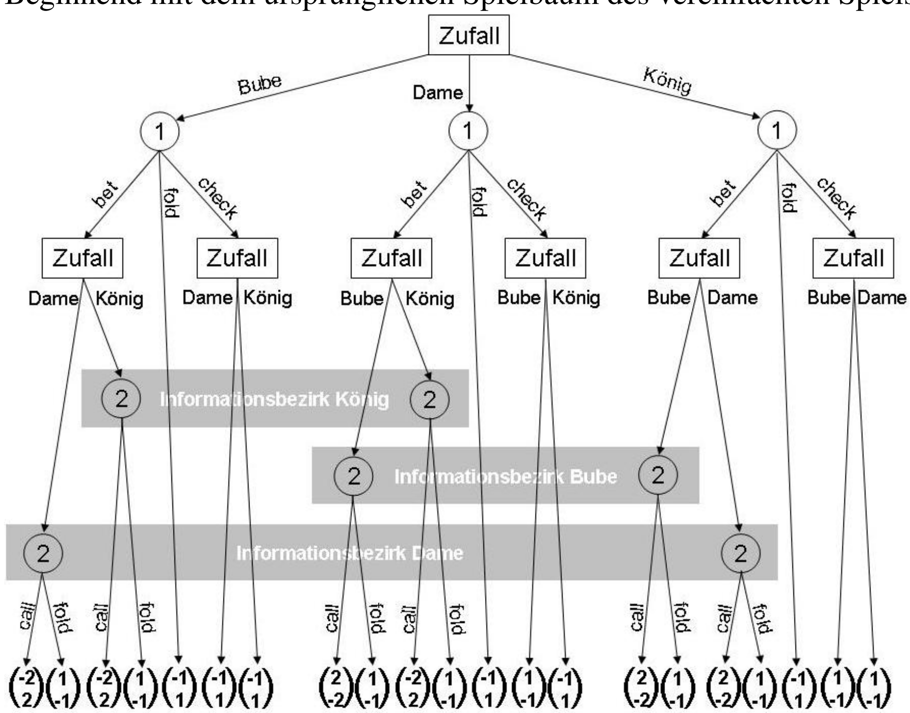
3.2 Lösung des vereinfachten Spiels

3.2.1 Lösung durch Elimination (Rückwärtsinduktion)

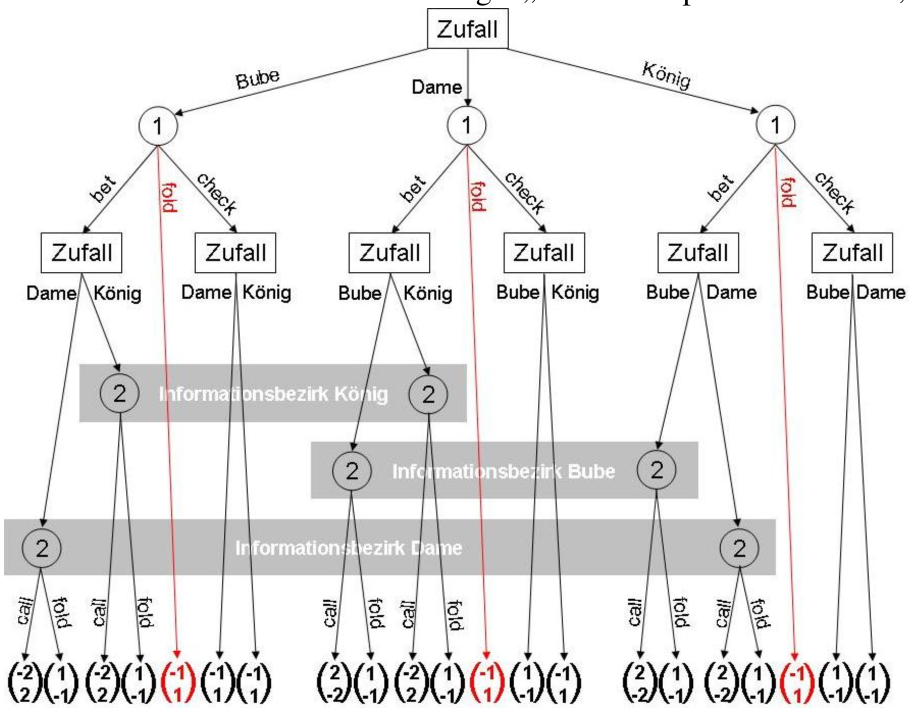
In dem Spielbaum zum vereinfachten Poker erscheinen drei Informationsbezirke (Bube, Dame und König) für den Dealer.

Bemerkung: Informationsbezirke
Kommt ein Spieler an die Reihe, so weiß er nicht, an welchem Knoten im Baum er sich genau befindet, da kein Spieler die vollständigen Informationen (aufgrund der unvollkommenen Information) über den Spielverlauf kennt. Ein Informationsbezirk sind die Teilbereiche eines Spiels, in denen sich ein Spieler befinden kann.
Ein Beispiel anhand unseres Baums für den Informationsbezirk „Dame": Die Herausforderung für den Dealer besteht nun darin, zu entscheiden, ob der Opener den schwächeren Buben oder den stärkeren König hält.

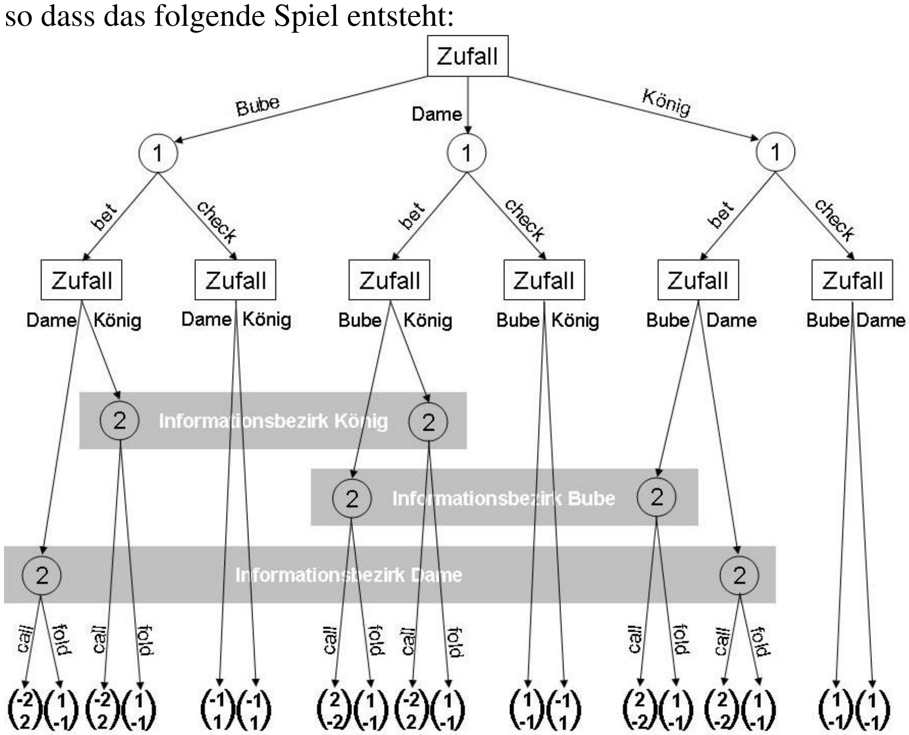
Beginnend mit dem ursprünglichen Spielbaum des vereinfachten Spiels



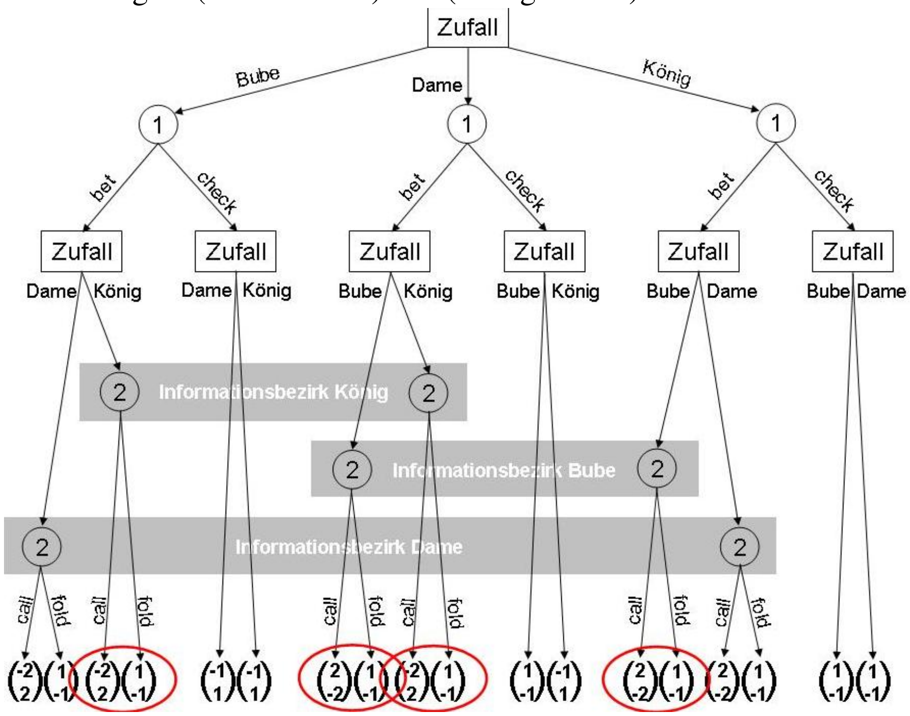
wird die stets strikt dominierte Strategie „fold“ des Openers eliminiert,



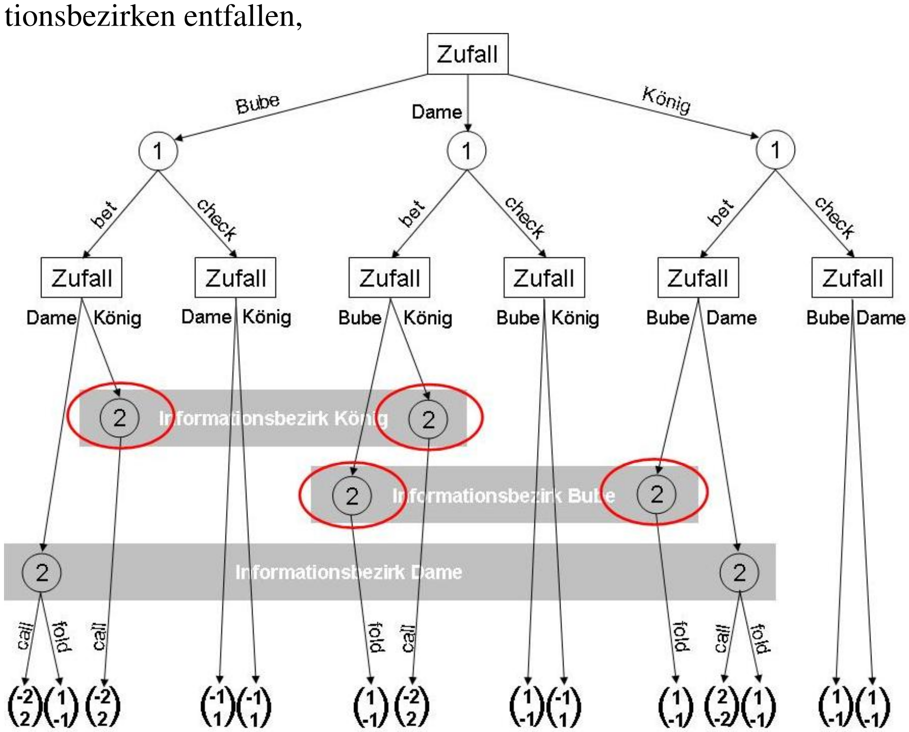
so dass das folgende Spiel entsteht:



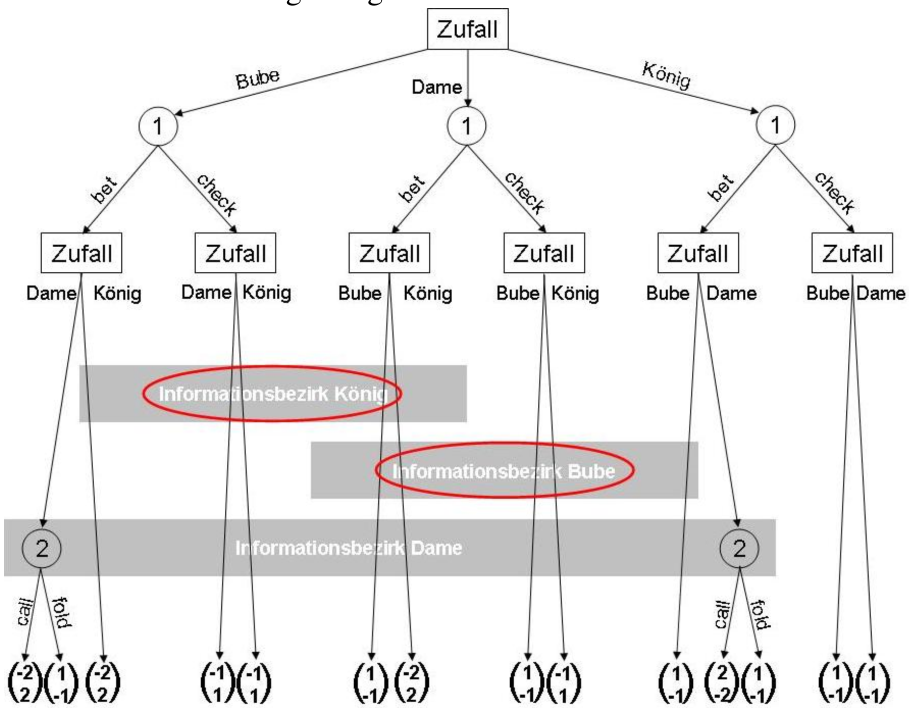
Die Strategien (Bube → fold) und (König → call) sind strikt dominierend,



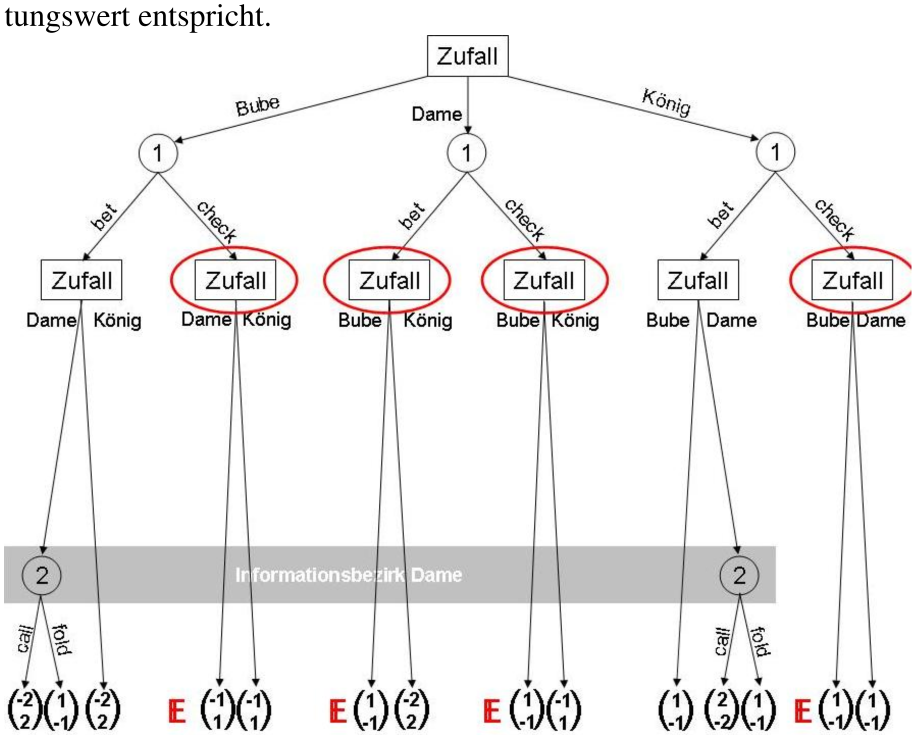
so dass die Entscheidungsmöglichkeiten des Dealers in den entsprechenden Informationsbezirken entfallen,



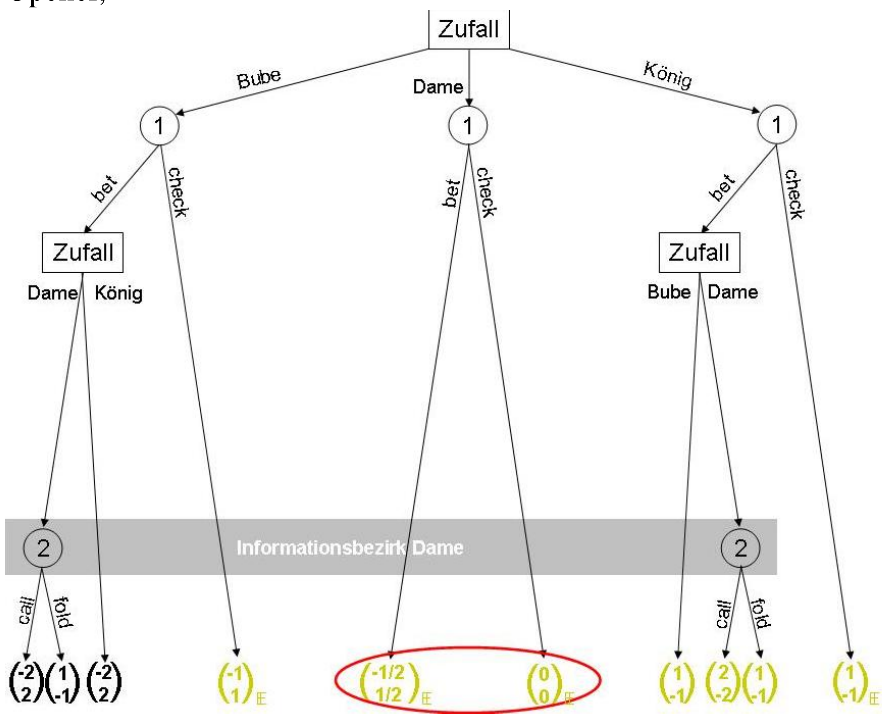
und damit auch die zugehörigen Informationsbezirke selber.



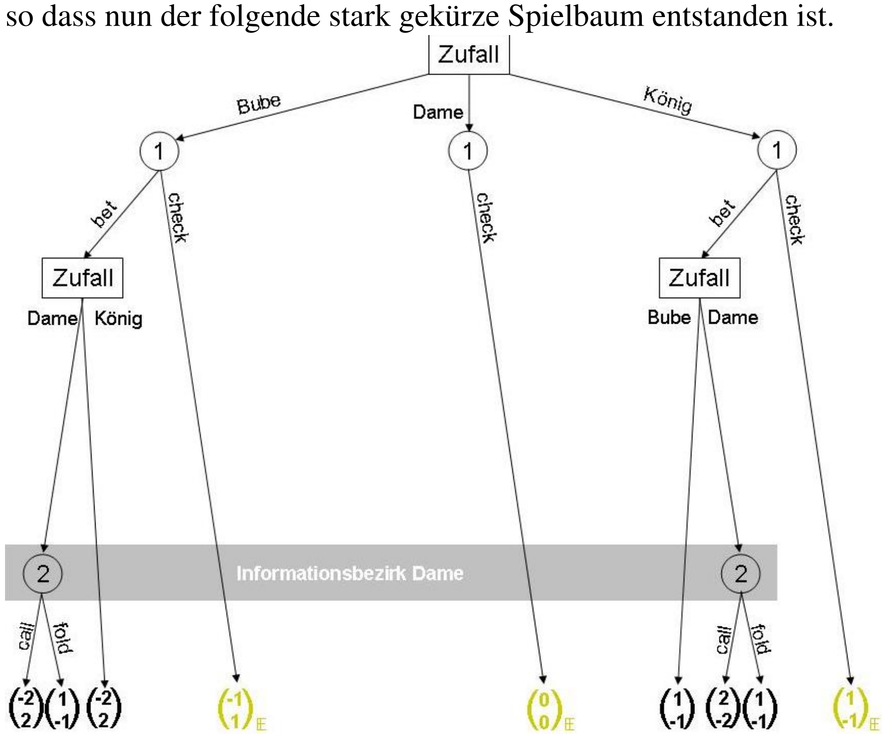
In einigen Fällen hängen die Auszahlungen nur noch vom Zufall ab, so dass bei den bekannten Eintrittswahrscheinlichkeiten ($\frac{1}{2}$) die „gemischte“ Auszahlung dem Erwartungswert entspricht.



Unter diesen Voraussetzungen existiert noch eine strikt dominierende Strategie für den Opener,



so dass nun der folgende stark gekürze Spielbaum entstanden ist.



3.2.2 Lösung durch die MaxiMin-Methode

Das vereinfachte Pokerspiel ist ein unvollkommenes, dynamisches Nullsummenspiel, weshalb man es mit der Maximin-Methode lösen kann.

Hierbei wählt jeder Spieler diejenige Strategie, die ihm im schlechtesten Fall noch die höchste Auszahlung bringt. Um diese zu finden, betrachtet er die minimalen Auszahlungen jeder Strategie, also das, was er auf jeden Fall bekommen wird, sucht die höchste davon heraus und spielt im Anschluss die dazugehörige Strategie.
Jeder Spieler maximiert also seine minimale Auszahlung.

Definition:
s^* ist eine *MaxiMin-Lösung*, falls

$$min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) \qquad \forall s_i \in S_i, i = 1, ..., n$$

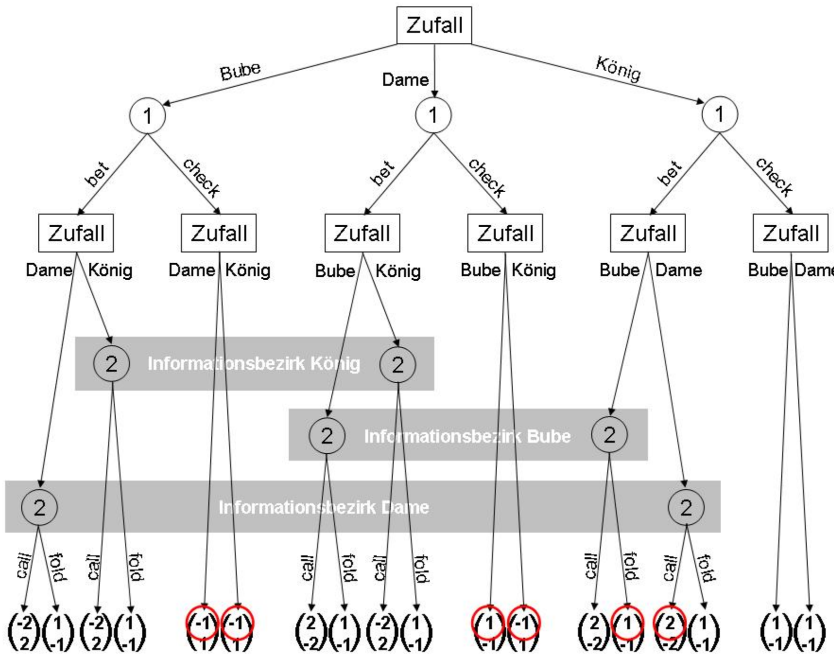
Bis jetzt haben wir das Spiel nur in der extensiven Form betrachtet, um die Maximin-Methode anwenden zu können, müssen wir es jedoch in die Normalform transformieren.

Spieler 1 hat unabhängig von seiner Hand (Bube, Dame oder König) die Möglichkeit zu betten ($\cdot_b$) oder zu checken ($\cdot_c$). Nachdem Spieler 2 eine der übrigen zwei Karten erhalten hat, kann er entweder mitgehen ($\cdot_m$, also callen) oder folden ($\cdot_f$).
Die Menge der Strategien eines Spielers sind die Kombinationen aller seiner möglichen Handlungsoptionen, eine Strategie für Spieler 1 ist z.B. (K_b, D_c, B_c), d.h. bei einem König zu betten und bei einer Dame oder einem Buben zu checken.

	$\begin{pmatrix}K_f\\D_f\\B_f\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_m\\D_f\\B_f\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_f\\D_f\\B_m\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_m\\D_f\\B_m\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_f\\D_m\\B_f\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_m\\D_m\\B_f\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_f\\D_m\\B_m\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_m\\D_m\\B_m\end{pmatrix}^T$
$\begin{pmatrix}K_c\\D_c\\B_c\end{pmatrix}^T$								
$\begin{pmatrix}K_c\\D_c\\B_b\end{pmatrix}^T$								
$\begin{pmatrix}K_c\\D_b\\B_c\end{pmatrix}^T$								
$\begin{pmatrix}K_c\\D_b\\B_b\end{pmatrix}^T$								
$\begin{pmatrix}K_b\\D_c\\B_c\end{pmatrix}^T$								
$\begin{pmatrix}K_b\\D_c\\B_b\end{pmatrix}^T$								
$\begin{pmatrix}K_b\\D_b\\B_c\end{pmatrix}^T$								
$\begin{pmatrix}K_b\\D_b\\B_b\end{pmatrix}^T$								

Die Auszahlungen der Spieler in den Zellen sind die Erwartungswerte der Einzelauszahlungen, die durch die zwei Strategien, die die Zelle bestimmen, zu erreichen sind. Die Erwartungswerte ergeben sich aus den Blättern des Spielbaums, welche man mit der jeweiligen Strategiekombination erreicht, multipliziert mit ihren Wahrscheinlichkeiten. Da es sich um ein Nullsummenspiel handelt und somit der Gewinn des einen Spielers der Verlust des anderen ist, reicht es, die erwarteten Auszahlungen eines Spielers auszurechnen, multipliziert man diese dann mit -1, erhält man die erwarteten Auszahlungen des Anderen.

Exemplarisch berechnen wir die erwartete Auszahlung von Spieler 1 für den Fall, dass er die Strategie (K_b, D_c, B_c) und Spieler 2 (K_m, D_m, B_f) spielt. Wir betrachten alle Auszahlungen die so erreicht werden können und gewichten sie mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

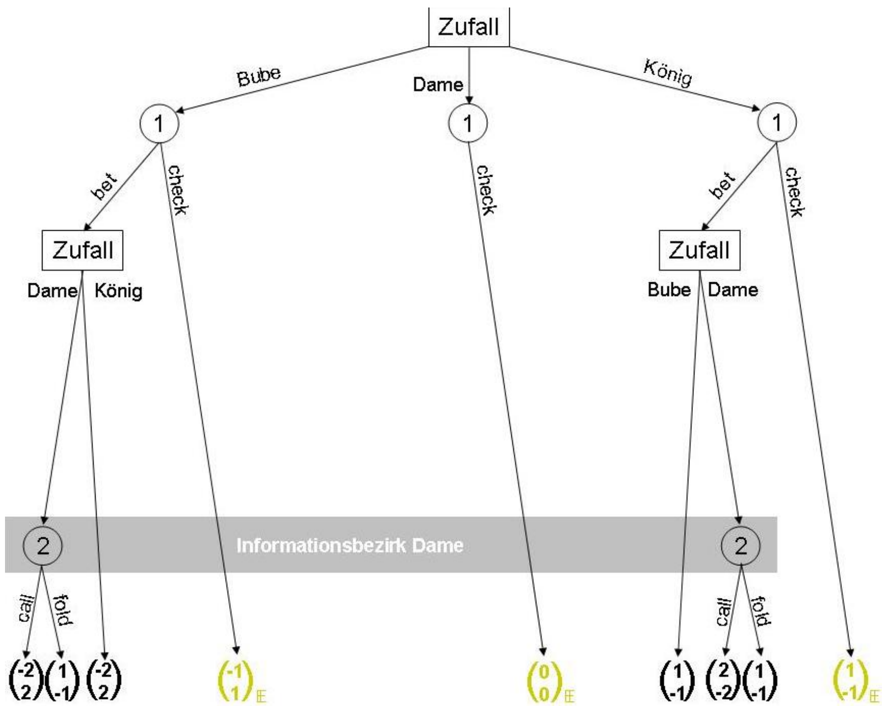


$$\mathbb{E}(u_1((K_b, D_c, B_c), (K_m, D_m, B_f))) = \tfrac{1}{6} \cdot (-1) + \tfrac{1}{6} \cdot (-1) + \tfrac{1}{6} \cdot 1 + \tfrac{1}{6} \cdot (-1) + \tfrac{1}{6} \cdot 1 + \tfrac{1}{6} \cdot 2 = \tfrac{1}{6}$$

Hat man alle Erwartungswerte ausgerechnet, kann man sie zusammen mit den Strategien in folgende Auszahlungmatrix eintragen und kann so das extensive Spiel in die Normalform umwandeln (den eben berechneten Wert findet man in Zeile 5, Spalte 6 wieder):

	$\begin{pmatrix}K_f\\D_f\\B_f\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_m\\D_f\\B_f\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_f\\D_f\\B_m\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_m\\D_f\\B_m\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_f\\D_m\\B_f\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_m\\D_m\\B_f\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_f\\D_m\\B_m\end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix}K_m\\D_m\\B_m\end{pmatrix}^T$
$\begin{pmatrix}K_c\\D_c\\B_c\end{pmatrix}^T$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{pmatrix}K_c\\D_c\\B_b\end{pmatrix}^T$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix}K_c\\D_b\\B_c\end{pmatrix}^T$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0
$\begin{pmatrix}K_c\\D_b\\B_b\end{pmatrix}^T$	1	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix}K_b\\D_c\\B_c\end{pmatrix}^T$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix}K_b\\D_c\\B_b\end{pmatrix}^T$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0
$\begin{pmatrix}K_b\\D_b\\B_c\end{pmatrix}^T$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix}K_b\\D_b\\B_b\end{pmatrix}^T$	1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0

Nun könnte man bereits die MaxiMin-Methode auf das Spiel anwenden, doch da wir vorher bereits einige Strategien durch Elimination (Rückwärtsinduktion) ausgeschlossen haben, können wir diese nun auch aus der Normalform des Spiels streichen. An der Lösung des Spiels ändert dies nichts.



Wie man leicht am reduzierten Spielbaum (s.o.) erkennt, kann Spieler 2 nur noch eine einzige Entscheidung treffen. Wenn er die Dame bekommen hat, kann er entweder callen oder folden. Beim König wird er immer callen, und beim Buben wird er immer folden, dies wurde durch die Auswertung dominanter Strategien gezeigt.
Spieler 2 hat also nur noch 2 mögliche Strategien.

Spieler 1 kann hingegen noch die 2 Entscheidungen treffen, ob er beim König und beim Buben jeweils bettet oder checkt.
Spieler 1 hat also noch 4 mögliche Strategien.

Auf diese Weise erhält man nun folgende Darstellung des Spiels:

	(K_m, D_f, B_f)	(K_m, D_m, B_f)
(K_c, D_c, B_c)	0	0
(K_c, D_c, B_b)	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$
(K_b, D_c, B_c)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
(K_b, D_c, B_b)	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$

Selbstverständlich hätte man die Reduktion der Strategien vor der Berechnung der vorherigen Auszahlungsmatrix vornehmen können um einen hohen Rechenaufwand zu vermeiden. Aus Anschauungsgründen werden hier aber beide Matrizen angeführt. Normalerweise sollte die Möglichkeit der Reduktion immer genutzt werden, da die Größe der Normalformmatrix exponentiell mit der Größe des Spiels (Runden · Handlungsalternativen) ansteigt.

Wir wenden nun die Maximin-Methode auf das Spiel an:

Spieler 1:

$$min((K_c, D_c, B_c)) = min(0, 0) = 0$$
$$min((K_c, D_c, B_b)) = min(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$$
$$min((K_b, D_c, B_c)) = min(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$$
$$min((K_b, D_c, B_b)) = min(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}) = -\frac{1}{6}$$

$$max(0, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{3}$$

$\Longrightarrow$ Spieler 1 wählt Strategie (K_b, D_c, B_c)

Da wir in der Auszahlungsmatrix nur den Payoff von Spieler 1 eingetragen haben, müssen wir nun, um die Maximin-Strategie von Spieler 2 herauszufinden, nicht seine minimale Auszahlung maximieren, sondern die maximale Auszahlung von Spieler 1 minimieren. Dies ist möglich, da es sich um ein Nullsummenspiel handelt.

Spieler 2:

$$max((K_m, D_f, B_f)) = max(0, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}) = \frac{1}{3}$$
$$max((K_m, D_m, B_f)) = max(0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$min(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{3}$$

$\Longrightarrow$ Spieler 2 wählt Strategie (K_m, D_f, B_f)

Spieler 1 wird bei einem Buben immer checken und bei einem König immer betten.
Spieler 2 wird mit einer Dame auf der Hand immer folden.

$\Longrightarrow ((K_b, D_c, B_c), (K_m, D_f, B_f))$ ist ein Gleichgewicht in reinen Strategien.
Dieses Gleichgewicht ist sogar ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Dies zeigt sich leicht durch Elimination dominierter Strategien aus der Ausgangsmatrix (diesmal mit den Nutzen von Spieler 1 und Spieler 2):

	(K_m, D_f, B_f)	(K_m, D_m, B_f)
(K_c, D_c, B_c)	(0,0)	(0,0)
(K_c, D_c, B_b)	$(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$	$(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
(K_b, D_c, B_c)	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
(K_b, D_c, B_b)	$(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$	$(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

$\Rightarrow$

	(K_m, D_f, B_f)	(K_m, D_m, B_f)
(K_c, D_c, B_c)	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(K_c, D_c, B_b)	$(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$	$(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$
(K_b, D_c, B_c)	$(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
(K_b, D_c, B_b)	$(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$	$(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

$\Rightarrow$

	(K_m, D_f, B_f)	(K_m, D_m, B_f)
(K_b, D_c, B_c)	$(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$

	(K_m, D_f, B_f)
(K_b, D_c, B_c)	$(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

$\Rightarrow$

$((K_b, D_c, B_c), (K_m, D_f, B_f))$ ist Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.

Die erwarteten Auszahlungen für die Spieler liegen im Gleichgewicht also bei $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ was bedeutet, dass Spieler 1 auf Dauer gewinnt, wenn beide bei ihren Gleichgewichtsstrategien bleiben.

Es sei noch angemerkt, dass eine Maximin-Strategie für den einzelnen Spieler keine optimale Lösung bedeutet, aber unter der Voraussetzung, dass sich der Gegenspieler rational verhält, also seinen Gewinn maximiert, ist kein besseres Ergebnis erzielbar.

Kapitel 4

Bluffen beim Poker

„Ein paar Menschen kann man immer zum Narren halten und alle Menschen lassen sich ab und zu zum Narren halten. Sie können aber nicht alle Menschen die ganze Zeit zum Narren halten.“
—
Abraham Lincoln

Ein Element beim Pokern ist die Täuschung, Bluff genannt. Bluffen ist ein wesentlicher Bestandteil des Pokerspiels. Der Zweck des Bluffens besteht darin, die anderen Spieler glauben zu lassen, dass man ein anderes Blatt (i.d.R ein besseres, oder aber auch ein schlechteres) hat, als es tatsächlich der Fall ist. Viele Anfänger lieben den Gedanken daran, andere Spieler zum Narren zu halten. Es kann allerdings ein riskantes Spiel sein, wenn die Gegner nicht auf den Bluff reinfallen.

Typische Gründe zum Bluffen:

- Die Anzahl der Spieler ist niedrig:
  Es ist viel wahrscheinlicher, dass ein Bluff gegen nur einen Gegner gelingt. Die Chance mit einem Bluff gegen viele (gute) Hände zu gewinnen ist eher gering. Außerdem ist in der Regel der Pot kleiner, was ihn weniger begehrenswert macht.

- Die Gegner sind vorsichtige Spieler:
  Hier ist Bluffen relativ risikoarm, da die Gegner meist folden. Setzen diese jedoch einen Bet, so haben sie in der Regel auch eine gute Hand.

- Bluffen auf den Flop:
  Blufft man in diesem Moment, so kann man viele Gegner abschrecken, denen vielleicht noch eine Karte zu einer guten Hand fehlt.

- Bei später Sitzposition und die vorherigen Spieler haben gecheckt:
  Dies ist ein typischer Bluff, der aber häufiger durchschaut wird. Einiger Spieler werden folden, jedoch sicher nicht alle.

- Viele Mitspieler haben gecheckt und man hat eine starke Hand:
  Hier kann es sinnvoll sein keinen allzu hohen Bet zu setzen, um die schwachen Hände am Tisch nicht gleich zum folden zu bringen. Ist man sich sicher, dass man die Runde gewinnt, so kann man den Pot vergrößern indem man sich ebenfalls als schwacher Spieler ausgibt.

Kapitel 5

Kuhn-Poker

5.1 Vergleich zum vereinfachten Spiel

Kuhnpoker ist eine Variante des vereinfachten Spiels, in der eine Form des Bluffens berücksichtigt wird.

Die Spieler können hier nur zwischen *bet* bzw. *pass* wählen. Je nach Situation stehen diese Strategien für bet oder call bzw. check oder fold.
Im Kuhn-Poker gibt es genauso wie im einfachen Spiel 6 mögliche Spielsituationen:

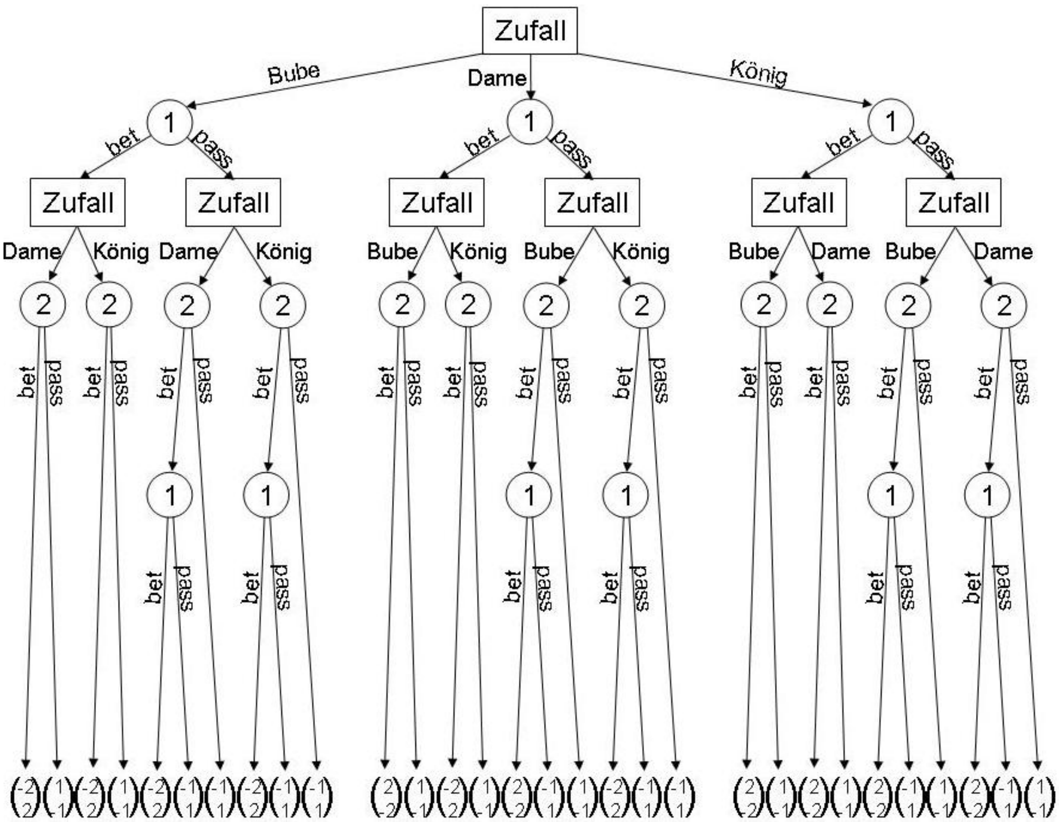
$$(K|Q, K|J, Q|K, Q|J, J|K, J|Q).$$

Neu beim Kuhn-Poker im Vergleich zu dem vereinfachten Spiel ist jedoch, dass es 5 mögliche Spielabläufe gibt:

$$(bb, bp, pp, pbb, pbp)$$

Sollte der Opener *pass*en (alt: checken), darf der Dealer in dieser Variante *bet*ten und der Opener daraufhin noch einmal *bet*ten (alt: callen) oder *pass*en (alt: folden).
Setzen beide Teilnehmer, kommt es zum Showdown und die höhere Karte gewinnt.

Die Veränderungen zu unserem bisherigen Spiel verdeutlichen sich an folgendem Spielbaum:



5.2 Gibt es ein optimales Spiel?

5.2.1 Einfache Annahmen:

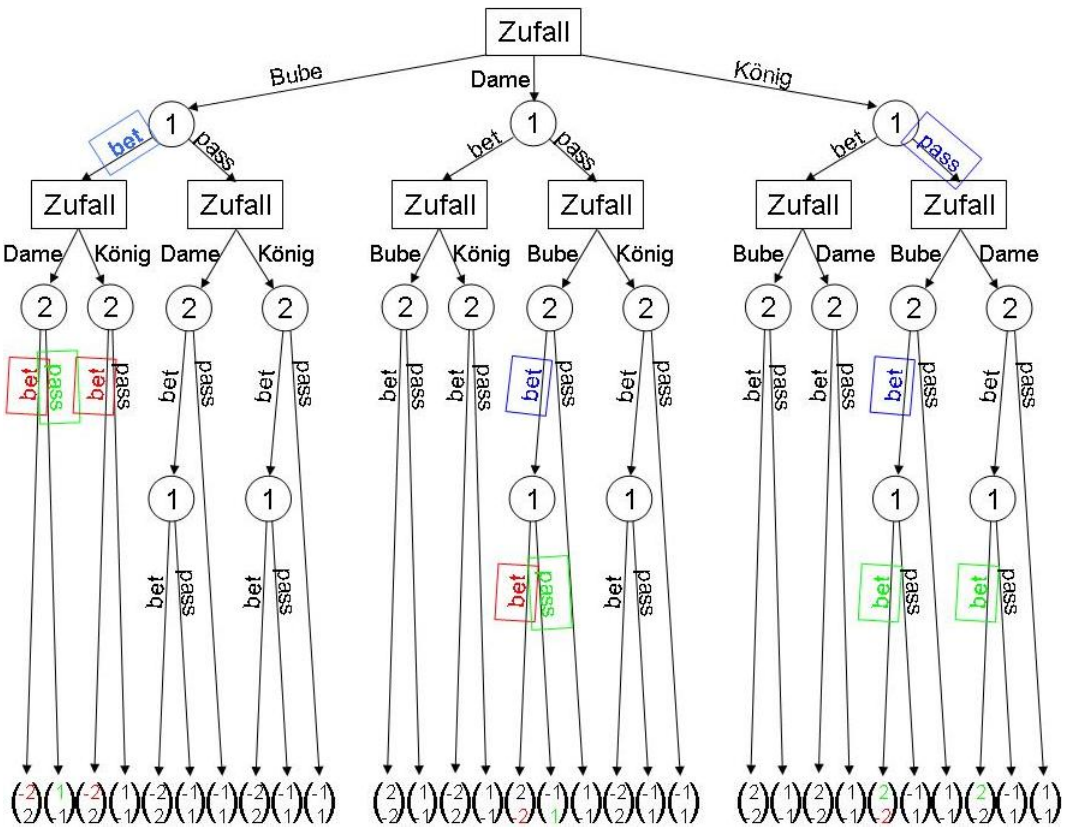
Aus den Spielregeln resultieren einige einfache Annahmen an die Entscheidungen der Spielteilnehmer. Dabei gilt, dass weder der Opener noch der Dealer

1. mit einem Buben eine Bet callen, da der Bube jeden Showdown verliert.
2. mit dem König auf eine Bet folden oder auf einen Pass checken.
3. mit der Dame betten, da der Andere mit Bube folden bzw. mit König callen wird. Hat der Gegner den Buben, so wird sich der Pot nicht vergrößern, hat er den König, so verliert man den höheren Einsatz.

   Im echten Texas-Hold'Em gibt es übrigens auch solche Situationen, bei denen man sich mit einem Bet mit großer Wahrscheinlichkeit nur gegen bessere Hände isoliert und den Bet daher unterlassen sollte.

5.2.2 Bluffen beim Kuhn-Poker

Durch die starke Einschränkung dieser Pokervariante kann man die wenigen Bluffmöglichkeiten alle einzeln aufführen.



Die Möglichkeiten des Openers zu Bluffen sind:

- Der Opener hält den Buben:
  Bei rationaler Spielweise müßte der Opener passen, da er dann mit dieser Hand bei einem Showdown seinen Verlust minimiert. Durch Bluffen besteht jetzt die Möglichkeit auch mit einem Buben zu gewinnen:

Der Opener hält den Buben und bettet

- Der Dealer hält die Dame
    - ∗ Er glaub dem Opener, dass dieser den König hält (weil er gesetzt hat) und passt, um seinen Verlust möglichst gering zu halten. Bei diesem Ausgang gewinnt also ein Bube, was bisher (bei rationaler Spielweise) nicht möglich war. **Gewinn: 1 GE**
    - ∗ Er durchschaut den Bluff und bettet. Bei diesem Spielzug ist der Verlust des Openers maximal. **Verlust: 2 GE**
- Der Dealer hält den König, also die höchste Karte im Spiel und wird daher immer mitgehen und das Spiel gewinnen. **Verlust: 2 GE**

⇒ Der Bluff mit einem Buben in der Hand ist also sehr risikoreich, jedoch die einzige Möglichkeit das Spiel mit dieser Hand zu gewinnen.

- Der Opener hält den König:
  Bei rationaler Spielweise müßte der Opener betten, da er mit dieser Hand bei einem Showdown immer gewinnt. Sein Gegenspieler wird aber vermutlich passen, so dass für den Opener lediglich ein Gewinn von 1 GE abfallen würde. Durch Bluffen kann er nun seinen Gewinn auf maximal 2 GE vergrößern:

  Der Opener hält den König und passt

  - Der Dealer hält die Dame
    - ∗ Er glaubt, dass der Opener den Buben hält (weil er gepasst hat) und bettet, um seinen Gewinn zu vergrößern. Der Opener callt den Bet und gewinnt beim Showdown den erhöhten Betrag von **2 GE**.
    - ∗ Er traut dem pass des Openers nicht und passt ebenfalls. Der Bluff hat hier nicht funktioniert. Trotzdem gewinnt der Opener, da es zu einem Showdown kommt. Allerdings bekommt hier der Opener nur einen Gewinn von **1 GE**.
  - Der Dealer hält den Buben.
    - ∗ Spielt er rational, wird er ebenfalls passen, weil er die niedrigste Karte hat und somit bei einem Showdown immer verlieren wird. Der Bluff des Openers hat nicht funktioniert - dennoch hat er einen Gewinn von **1 GE**.
    - ∗ er hat jetzt ebenfalls die Möglichkeit zu bluffen. Siehe Dealer (Spieler 2) blufft

  ⇒ Der Bluff mit einem König hat keinerlei Risiko und es besteht so die Möglichkeit seinen Gewinn zu maximieren.

Die Möglichkeiten des Dealers zu bluffen:

- Der Dealer hält den Buben:
  Wenn er rational spielt, müßte er passen, weil er mit der niedrigsten Karte des Spiels eigentlich keine Chance auf einen Sieg hat. Durch einen Bluff hat auch er die Möglichkeit, trotz seiner schwachen Hand, noch einen Gewinn zu erzielen.
  - Der Opener hält die Dame und hat gepasst und der Dealer bettet auf seinen Buben.
    * Der Opener glaubt, dass der Dealer aufgrund seines Bets den König hält und passt
      Der Bluff war also erfolgreich und der Dealer erhält einen **Gewinn von 1 GE**
    * Der Opener durchschaut den Bluff und callt den Bet. Es kommt zum Showdown und der Dealer hat seinen maximalen **Verlust von 2 GE**
  - Der Opener hält den König und hat gepasst (Bluff s.o.) und der Dealer bettet auf seinen Buben (Bluff).
    * Der Opener weiß zwar nicht, dass der Dealer blufft, aber er wird mit dem König immer callen. Durch den Bluff des Dealers war hier also der Bluff des *Openers* erfolgreich. Dieser erhält einen Gewinn von 2 GE. Der Dealer verliert.

⇒ Der Bluff des Dealers kann nur Erfolg haben, wenn der Opener die Dame hält.

In dieser Spielvariante kann man nur mit dem Buben oder dem König bluffen. Überträgt man aber diese wenigen Fälle auf ein reales Pokerspiel (Texas-Hold'Em) mit einem Kartendeck von 52 Blatt, so kann man die Bedeutung des Bluffens nur erahnen.
Zusammenfassend läßt sich sagen, dass das Spiel durch Bluffen wesentlich interessanter wird und das sich sowohl der Spielverlauf als auch der Spielausgang nicht alleine durch die Vergabe der Karten definiert.

5.2.3 Entscheidungen und Wahrscheinlichkeiten

Der *Dealer* stellt sich nun folgende Fragen:

- Wie oft (Wahrscheinlichkeit q_B) soll ich eine Bet setzen, wenn der Opener zu mir checkt und ich einen Buben habe?
- Wie oft (W'kt q_D) soll ich mit der Dame callen, wenn der Opener eine Bet gibt?

Dem *Opener* hingegen stellen sich folgende Fragen:

- Wie oft (Wahrscheinlichkeit p_B) soll ich mit einem Buben betten?
- Wie oft (W'kt p_D) soll ich mit einem Dame callen, wenn der Dealer eine Bet gibt?
- Wie oft (W'kt p_K) soll ich mit einem König betten?

5.2.4 Der Erwartungswert

Mit Hilfe der obigen Wahrscheinlichkeiten können wir ermitteln, welchen erwarteten Nutzen der Dealer und welchen der Opener hat. Hierzu überlegen wir uns den Spielverlauf in sechs Fällen:

1. Der Opener hält den Buben und der Dealer hält die Dame:
   (a) Der Opener bettet und der Dealer callt. Dann verliert der Opener 2 GE. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $p_B * q_D$.
   (b) Der Opener bettet und der Dealer foldet. Dann gewinnt Opener 1 GE. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $p_B * (1 - q_D)$.
2. Der Opener hält den Buben und der Dealer hält den König:
   (a) Der Opener verliert 2 GE mit W'kt p_B, wenn er bettet.
   (b) Sonst verliert er 1 GE.
3. Der Opener hält die Dame und der Dealer hält den Buben:
   (a) Der Opener checkt (laut Voraussetzung). Mit W'kt $(1-q_B)$ checkt auch der Dealer. Somit erhält der Opener einen Gewinn von 1 GE.

(b) Mit W'kt $q_B * p_D$ bettet der Dealer und wird vom Opener gecallt. Dann gewinnt der Opener 2 GE.

4. Der Opener hält die Dame und der Dealer hält den König:

   (a) Der Opener verliert 2 GE wenn er den Bet vom Dealer callt. Die Bet passiert mit W'kt p_D.

5. Der Opener hält den König und der Dealer hält den Buben:

   (a) Der Opener gewinnt 2 GE, wenn er checkt und der Dealer bettet. Die passiert mit der W'kt $(1 - p_K) * q_B$.

   (b) In den anderen Fällen gewinnt er 1 GE mit W'kt $1 - (1 - p_K) * q_B$.

6. Der Opener hält den König und der Dealer hält die Dame:

   (a) Wenn Opener bettet und Dealer callt, dann gewinnt der Opener 2 GE. Dies passiert mit W'kt $p_K * q_D$.

   (b) Andernfalls gewinnt Opener 1 GE mit W'kt $1 - p_K * q_D$.

Jeder der 6 Fälle ist gleich wahrscheinlich.
Der Opener verliert 2 GE in den Fällen 1(a), 2(a) und 4(a), also mit W'kt:

$$P_B = \frac{1}{6} * (p_B * q_D + p_B + p_D).$$

Der Opener gewinnt 1 GE in den Fällen 1(b), 3(a), 5(b) und 6(b) mit W'kt:

$$P_D = \frac{1}{6} * (p_B * (1 - q_D) + 1 - q_B + 1 - (1 - p_K) * q_B + 1 - p_K * q_D).$$

Der Opener gewinnt 2 GE in den Fällen 3(b), 5(a) und 6(a) mit W'kt:

$$P_K = \frac{1}{6} * (q_B * p_D + (1 - p_K) * q_B + p_K * q_D).$$

Seine Gewinnerwartung ist also

$$\mathbb{E}(u_1^+) = -2 * P_B + 1 * P_D + 2 * P_K.$$

Der Opener verliert aber seinen Blind mit der W'kt

$$1 - (P_B + P_D + P_K) = 1 - P_B - P_D - P_K$$

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache bekommen wir einen Erwartungswert von

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u_1) &= (-2 * P_B + 1 * P_D + 2 * P_K) + (-1) * (1 - P_B - P_D - P_K) \\ &= -P_B + 2P_D + 3P_K - 1\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für P_B,P_D und P_K folgt also ein Erwartungswert von:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u_1) =& - P_B + 2P_D + 3P_K - 1 \\ =&(-1)(\frac{1}{6}(p_Bq_D + p_B + p_D)) \\ &+ 2(\frac{1}{6}(p_B(1 - q_D) + 1 - q_B + 1 - (1 - p_K)q_B + 1 - p_Kq_D)) \\ &+ 3(\frac{1}{6}(q_Bp_D + (1 - p_K)q_B + p_Kq_D)) - 1 \\ =&\frac{1}{6}(-p_Bq_D - p_B - p_D) \\ &+ \frac{1}{6}(2p_B - 2p_Bq_D + 2 - 2q_B + 2 - 2q_B + 2p_Kq_B + 2 - 2p_Kq_D) \\ &+ \frac{1}{6}(3q_Bp_D + 3q_B - 3p_Kq_B + 3p_Kq_D) - 1 \\ =&\frac{1}{6}(p_B - p_D - q_B - 3p_Bq_D + 3q_Bp_D - p_Kq_B + p_Kq_D + 6) - 1 \\ =&\frac{1}{6}(p_B(1 - 3q_D) + p_D(3q_B - 1) + p_K(q_D - q_B) - q_B)\end{aligned}$$

Setzen wir $q_B = q_D = \frac{1}{3}$, so bekommen wir unabhängig von p_B, p_D und p_K einen Erwartungswert von $-\frac{1}{18}$ für den Opener. Diese Strategie nennt man „indifferent" und sie ist gleichzeitig die Beste, die der Dealer haben kann. In einem Drittel der Fälle sollte er mit dem Buben bluffen und in einem Drittel der Fälle sollte er mit der Dame callen.

Gegen andere Strategien kann der Opener durch Modifikation von p_B, p_D und p_K einen Vorteil erzielen.

Auch für den Opener gibt es eine indifferente Strategie, seinen Erwartungswert kann man nämlich auch wie folgt aufschreiben:

$$\tfrac{1}{6} * (q_B * (3 * p_D - p_K - 1) + q_D * (p_K - 3 * p_B) + p_B - p_D)$$

Wählen wir nun p_K beliebig, so ist die indifferente Strategie der Gestalt, dass $p_B = \frac{1}{3} * p_K$ und $p_D = p_B + \frac{1}{3}$ ist. Auch hier bekommen wir einen Erwartungswert von $-\frac{1}{18}$.

Man kann das Spiel also wie folgt parametrisieren:
Die Strategie des Openers kann durch

$$(\alpha, \beta, \gamma)$$

und die des Dealers durch

$$(\eta, \xi)$$

dargestellt werden. Kuhn hat nun gezeigt, dass die Menge der Gleichgewichtsstrategien für den Opener diese Form hat:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\tfrac{\gamma}{3}, \tfrac{(1+\gamma)}{3}, \gamma) \text{ für } 0 \leq \gamma \leq 1$$

Somit wird die Menge aller Nash-Strategien von einem einzigen Parameter bestimmt.
Für den Dealer jedoch gibt es nur ein Nash-Gleichgewicht:

$$\eta = \tfrac{1}{3}, \xi = \tfrac{1}{3}$$

Für den Fall, dass beide Spieler eine optimale Strategie verfolgen, hat der Erfinder Harold W. Kuhn bewiesen, dass der Opener auf Dauer bankrott gehen muss. Er verliert mindestens $\frac{1}{18}$ des Blinds pro gespielter Hand, wenn der Dealer keine Fehler macht. Dieser kommt aufgrund seiner Position in einen Informationsvorteil, da er bereits vor seiner Handlungsmöglichkeit weiß, welche Entscheidung der Opener getroffen hat. Dementsprechend profitiert er in seinem Handlungsbeschluss von der erhaltenen Information.
Der Opener kann nur dann gewinnen, wenn der Dealer suboptimal spielt und der Opener durch Abweichen von seiner optimalen Strategie die fehlerhafte Spielweise des Dealers erkennt. Daraufhin kann der Opener seine Strategie anpassen und so auf lange Zeit gewinnen (siehe nächster Abschnitt).

Kuhnpoker selbst ist keine Pokervariante, die gespielt wird. Diese theoretische Erfindung verdeutlicht aber ganz essentiell, wie wichtig die Position im Poker ist. Die Erkenntnisse Kuhns gelten für alle gespielten Pokervarianten. Besonders Anfängern kann es nicht eindringlich genug nahegelegt werden, dass sie im Spiel nicht nur ihr Blatt beachten müssen, sondern immer auch ihre Position am Tisch.

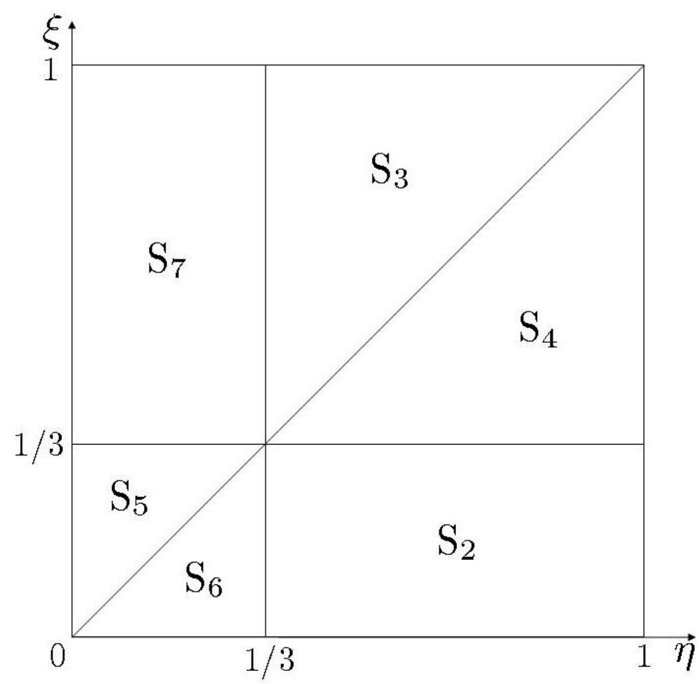
5.2.5 Wie spielt man am Besten?

Die Strategien $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{\gamma}{3}, \frac{(1+\gamma)}{3}, \gamma)$ für den Opener und $(\eta, \xi) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ für den Dealer sind also optimal. Wie müßte einer der Beiden seine Spielweise ändern, wenn der Gegner die o.g. Strategie verläßt?

Wir beschränken uns hier aus Sicht des Openers auf die Analyse der Strategie des Dealers. Dessen Strategieraum kann, wie man an der folgenden Grafik erkennt, in sechs Segmente unterteilt werden. Diese Strategien beschreiben die anzuwendende Strategie des Openers auf das suboptimale Spiel des Dealers.
Der Opener hat die folgenden acht reinen Strategien:

$$S_1 = (B_p, D_p, K_p);\ S_2 = (B_p, D_p, K_b);\ S_3 = (B_p, D_b, K_p);\ S_4 = (B_p, D_b, K_b);$$
$$S_5 = (B_b, D_p, K_p);\ S_6 = (B_b, D_p, K_b);\ S_7 = (B_b, D_b, K_p);\ S_8 = (B_b, D_b, K_b),$$

wobei weder S_1 (immer passen) noch S_8 (immer betten) jemals die beste Antwortstrategie sind. Die übrigen sechs können also beste Antworten auf eine suboptimale Strategie des Dealers sein.



Spielt der Dealer optimal so befindet er sich im Punkt $(\eta, \xi) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Weicht er mit seiner Strategie von diesem Punkt ab, so kann der Opener durch Modifikation seiner Strategie $(\alpha, \beta, \gamma) = (\frac{\gamma}{3}, \frac{(1+\gamma)}{3}, \gamma)$ seinen errechneten Verlust von $\frac{1}{18}$ GE pro Spiel mindern oder sogar gewinnen.

Wir betrachten das Spiel aus Sicht des Openers und wollen den Erwartungswert maximieren. Wir kennen q_B und q_D.

- Wenn $q_B > \frac{1}{3}$ ist, dann maximieren wir den Erwartungswert, indem wir $p_D = 1$ wählen.
  D.h. wenn der Dealer zu oft mit seinem Buben blufft, dann sollten wir die Dame immer callen.
- Wenn $q_B < \frac{1}{3}$, setze $p_D = 0$. D.h. wenn der Dealer zu wenig mit dem Buben blufft, sollten wir die Dame auf eine Bet nicht callen, sondern stets folden.
- Wenn $q_B = \frac{1}{3}$, so ist es irrelevant, wie wir mit der Dame auf einen Bet reagieren.

Das etwas kontra intuitive Resultat ist:
Spielt der Gegner optimal, so ist auf der eigenen Seite keine Optimierung möglich.
Spielt er hingegen nicht optimal, so ist es optimal die eigene Strategie auf die Statistik des Gegners durch Modifikation von q_B und q_D anzupassen. Ein Spiel nach der optimalen Strategie ist dann nicht mehr erwartungsnutzenmaximal.

5.3 Fazit

Ein im Sinne beider Spieler optimales Spiel determiniert keine perfekte Strategie für einen Spieler. Vielmehr hängt es von der Statistik des Gegenübers ab, mit welcher Strategie man seinen Erwartungswert maximieren kann.

Hieran sieht man, wie wichtig auch im richtigen Texas-Hold'Em sogenannte „Reads“ und Statistiken über das Spiel der Gegner sind. Man kann sicherlich ein relativ optimales Standard-Spiel erlernen und damit Erfolg haben, aber eine Gewinnmaximierung erreicht man nur durch ein an die Gegner angepasstes Spiel.

Kapitel 6

Quellenverzeichnis

- Billings, D., Burch, N., A., D., Holte, R., Schaeffer, J., Schauenberg, T. und Szafron, D. (2003). Approximating game theoretic optimal strategies for full-scale poker. In 18th International Joint Conference on AI, Vol. 18.
- David Sklansky (1989): The Theory of Poker, Two Plus Two Publishing
- Friedman, L. (1971): Optimal bluffing strategies in poker, Management Science 17, B764-B771
- Ganzfried: Generalized Kuhn Poker: A Test Case for Game-Theoretic Extrapolation
- Hoehn, Bret; Southey, Finnegan; Holte, Robert C.; Bulitko, Valeriy (2005): Effective Short-Term Opponent Exploitation in Simplified Poker
- Koller, D.;Pfeffer, A. (1997): Representations and Solutions for Game-Theoretic Problems, in: Artificial Intelligence, 94(1), 167-215.
- Kuhn, H. W. (1950): A Simplified Two-Person Poker, in: CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF GAMES (1) (Princeton University Press), S.97 - 103
- Lazaric, Alessandro; Quaresimale, Mario; Restelli, Marcello: On the Usefulness of Opponent Modeling: the Kuhn Poker case study (Short Paper), Proc. of 7th Int. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2008), Padgham, Parkes, Müller and Parsons (eds.), May, 12-16., 2008, Estoril, Portugal, pp. 1345-1348.
- Osborne, M. J. (2004): An introduction to Game Theory, Oxford University Press
- Swanson, Jason (2005): Game Theory and Poker

- von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1944): The Theory of Games and Economic Behavior, in: Princeton University Press

- http://wikiludia.mathematik.uni-muenchen.de