Operations Research
- Im Fokus der Spieltheorie -

Daniel Emmrich   Peter Götzinger   Alexander Juri

12. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Ziel des Projektes

Auf das Projektthema „Operations Research“ sind wir auf der Suche nach einem Anwendungsgebiet für Spieltheorie in der Welt der Wirtschaft und Finanzen gestoßen. Nachdem wir festgestellt haben, dass die Spieltheorie neben anderen mathematischen Methoden nur einen Teil des Operations Research ausmacht, haben wir uns zunächst auf diesen spieltheoretischen Bereich konzentriert. Wir stellten dann jedoch fest, dass die anderen Methoden zwar in ihrem theoretischen Hintergrund zu trennen sind, in ihrer Anwendung jedoch starke Zusammenhänge herrschen.
Unser Ziel ist es, die mathematischen Methoden innerhalb des Operations Research abzugrenzen und ihre Methoden kurz zu erklären. Dann zeigen wir anhand einiger Beispiele die Zusammenhänge zwischen diesen Methoden und wie ihre Ergebnisse interpretiert werden können. Schließlich werden wir Vor- und Nachteile der einzelnen Methoden zeigen und einen Ausblick auf die Komplexität der Problemstellung geben, die in der Realität herrscht.

1.2 Was bedeutet Operations Research?

Zahlreiche Problemstellungen aus Wirtschaft und Technik erreichen eine Komplexität, die mit den traditionellen Methoden der Entscheidungsfindung nicht mehr zu lösen sind. In der Bemühung diese Probleme systematisch zu lösen, entwickelte sich im Zuge des 2. Weltkrieges Operations Research aus der Verknüpfung unterschiedlicher mathematischer Methoden. Wurden damit während des Krieges noch Probleme wie die optimale Arbeitsteilung beim Minenlegen behandelt, verlagerte sich der Schwerpunkt nach dem Krieg auf wirtschaftliche Probleme. Die deutsche Fachvereinigung, die Gesellschaft für Operations Research, definiert in ihrer Mitgliederzeitschrift OR News:

1.1 Definition *Operations Research ist ein auf praktische Anwendung mathematischer Methoden ausgerichteter Wissenszweig und befasst sich mit der Problemanalyse und Vorbereitung optimaler Entscheidung in Organisationen. Operations Research ist geprägt durch die Zusammenarbeit von Mathematik,* *Wirtschaftswissenschaften und Information.*[1]

Diese Definition umfasst die drei wesentlichen Charakteristika des Operations Research:

1. Entscheidungsvorbereitung
2. Anstreben einer optimalen Entscheidung
3. Verwendung mathematischer Methoden

Entscheidungsvorbereitung
Die Informationen, die man durch Anwendung des Operations Research erhält, liefern nur die Grundlagen zu einer Entscheidungsfindung. Somit dient OR der Entscheidungsfindung. Die Entscheidung selbst wird von anderen Gremien, z.B. der Firmenleitung, unter Berücksichtigung der erhobenen Daten getroffen.

Optimierung der angestrebten Lösung
Ziel des Operations Research ist, unter allen möglichen Lösungen die optimal herauszufinden. Dazu müssen die möglichen Lösungen im Hinblick auf ein übergeordnetes Ziel vergleichbar gemacht werden. Ein übergeordnetes Ziel wäre beispielsweise die Gewinnoptimierung, das durch das optimale Produktionsprogramm erreicht wird.
Bei der optimalen Lösung für das Gesamtproblem handelt es sich in den meisten Fällen um einen Kompromiss hinsichtlich der Teilprobleme, bei dem kein Teilproblem als einzelnes optimal gelöst ist, aber das Gesamtproblem nicht besser gelöst werden kann.

Verwendung mathematischer Methoden
Um eine rechnerische Lösung eines Problems zu ermöglichen, ist eine mathematische Formulierung des Lösungsansatzes erforderlich. Demzufolge muss das Realproblem in ein mathematisches Formalproblem überführt werden.
Da ein mathematisches Modell die Realität nicht vollständig erfassen kann, wird man den Teil aus der Realität ausschneiden, der sich im Modell nachbilden lässt. Dieser Ausschnitt sollte alle für das Problem relevanten Realtatbestände erfassen.
Dieser Ausschnitt muss dann in ein mathematisches Modell überführt werden. Da eine vollkommene Nachbildung des Realitätsausschnittes im Regelfall zu kompliziert wäre, wird das Modell auf die tragenden Hauptlinien eingeschränkt, die gewährleisten, dass eine Isomorphie zwischen der formalen Struktur des Modells und der Struktur der zugehörigen realen Situation zustande kommt.
Wird die Fragestellung des Problems auf das Modell, welches selbst noch keine Fragestellung enthält, übertragen, entsteht ein Formalproblem. Darauf lassen sich nun mathematische Methoden anwenden, um dieses Problem zu lösen. Das Resultat kann dann in die Realität zurückübertragen und als Entscheidungsvorschlag wirken.

[1] Definition der Gesellschaft für Operations Research aus dem Jahre 1998

1.3 Operations Research und Spieltheorie

Viele Fragestellungen aus Industrie und Wirtschaft beschäftigen sich mit Optimierungsproblemen, z.B. in Produktion oder Logistik. Diese Probleme können mit entsprechenden Modellen und Methoden, wie z.B. der Warteschlangentheorie, bearbeitet werden. Tritt jedoch eine Konkurrenzsituation auf, kann dieses Vorgehen nicht mehr angewendet werden. Um eine Konkurrenzproblematik optimieren zu können, muss eine optimale, also beste, Antwort auf die Handlungsmöglichkeiten des Konkurrenten gefunden werden. Dazu muss als Modell ein Spiel aus der Spieltheorie, beispielsweise ein Konstantsummenspiel, gewählt werden. Dabei fließen die Erkenntnisse aus den anderen Bereichen durchaus mit ein. So lässt sich beispielsweise durch die Sensitivität einer Optimierung die Nutzenfunktion ableiten, die die Grundlage für eine spieltheoretische Betrachtung ist.

Kapitel 2

Grundlagen der Spieltheorie

In diesem Kapitel führen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze ein, welche die Grundlage für die späteren Kapitel bilden. Leser, die mit den Grundbegriffen der Spieltheorie bereits vertraut sind, können diesen Abschnitt überspringen. Für die anderen Leser bietet er einen kurzen Überblick.

2.1 Definitionen

2.1.1 Normalformenspiel

Ein zentraler Begriff der Spieltheorie ist der des *Normalformenspiels*:

2.1 Definition *Ein Spiel in Normalform (oder auch stratiger oder statischer Form) besteht aus folgenden Elementen:*

1. $M = \{1, \cdots, N\}$ *bezeichnet die endliche Menge von Spielern*
2. *Für alle* $i \in M$ *ist die Menge* $S_i \neq 0$ *der Strategien ausgezeichnet*
3. *Für alle* $i \in M$ *ist eine Nutzenfunktion* $u_i : S \to \mathbb{R}$ *festgelegt, wobei* $S := \prod_{i=1}^{N} S_i$ *den Strategieraum bezeichnet.*

Dabei gilt es zu beachten, dass die Menge der Strategien S_{-i} meistens endlich ist. Zudem kann man die Nutzenfunktion auch in Vektorscheibweise formulieren. Tut man dies, so hat die Nutzfunktion folgende Gestalt:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} : S \to \mathbb{R}^N$$

Dabei kann man anstelle von $\mathbb{R}$ auch einen beliebigen Zielraum Z wählen.

2.1.2 Dominanz

Da sich die Spieltheorie grundsätzlich damit beschäftigt optimale Lösungen für gegebene Spielsituationen zu finden, ist es erforderlich verschiedene Begriffe in diesem Bezug zu kennen. Im Folgenden werden wir den Begriff der *Dominanz* definieren.

2.2 Definition *Sei $k \in M$ dann gilt:*

1. $s_k \in S_k$ *wird strikt dominiert durch* $\widetilde{s_k} \in S_k$, *wenn für alle* $s_{-k} \in S_{-k}$ *gilt:* $u_k(\widetilde{s_k}, s_{-k} > u_k(s_k, s_{-k})$
2. $s_k \in S_k$ *wird schwach dominiert durch* $\widetilde{s_k} \in S_k$, *wenn für alle* $s_{-k} \in S_{-k}$ *gilt:*
   $u_k(\widetilde{s_k}, s_{-k} \geq u_k(s_k, s_{-k})$ *und* $\exists s^0_{-k} \in S_{-k}$:$u_k(\widetilde{s_k}, s^0_{-k} > u_k(s_k, s^0_{-k})$

2.1.3 Gleichgewicht in dominanten Strategien

Mit den oben genannten Definitionen können wir nun festlegen, was ein *Gleichgewicht in dominaten Strategien* bedeutet.

2.3 Definition *Sei* $\widetilde{s} = (\widetilde{s_1}, ...\widetilde{s_N}) \in S$. *Dann heißt* $\widetilde{s}$ *Gleichgewicht in (strikt) dominaten Strategien, genau dann wenn für alle* $k \in M$ *und alle* $s \in S$ *gilt:* $\widetilde{s_k} \neq s_k \Rightarrow \widetilde{s_k}$ *ist (strikt) (bzw. schwach) dominiert über* s_k.
Das heißt im Fall von strikt dominanten Strategien: Für alle $k \in M$ *und alle* $s \in S$ *gilt:* $\widetilde{s_k} \neq s_k \Rightarrow u_k(\widetilde{s_k}, s_{-k}) > u_k(s_k, s_{-k})$

2.1.4 Elimination durch Dominanz

Anhand der Definition 2.2 lässt sich der Sachverhalt aus Definition 2.3 analog auf schwache Dominanzen übertragen. Mit Hilfe der Definition 2.3 kann man das *Prinzip der Elimination durch strikte Dominanzen* herleiten. Dieses Verfahren liefert uns bestenfalls ein *Nashgleichgewicht*.

2.1.5 Nashgleichgewicht

Wir definieren im Folgenden den Begriff des Nashgleichgewichts bei Spielen in Normalform.

2.4 Definition *Eine Strategiekombination* $s^* \in S$ *heißt Nashgleichgewicht, wenn für jeden Spieler k und jede Strategiekombination* $s_k \in S_k$ *die Ungleichung* $u_k(s^*_k, s^*_{-k} \geq u_k(s_k, s^*_{-k})$ *gilt. Das bedeutet, dass sich kein Spieler k verbessern kann, indem er von der Strategie* s^*_k *abweicht.*

2.2 Sätze

In Zusammenhang mit einem Nashgleichgewicht gibt es im Rahmen der Vorlesung zum Thema Spieltheorie ein Reihe von wichtigen Sätzen, die hier lediglich aufgeführt, allerdings nicht bewiesen werden.

2.5 Satz *Ein Gleichgewicht in strikter Dominanz ist auch ein Nashgleichgewicht.*

2.6 Satz *(M, S', u') sei aus (M, S, u) durch strikte Elemination entstanden. Dann ist jedes Nashgleichgewicht von (M, S', u') auch ein Nashgleichgewicht (M, S, u).*

Auf Grund der bisherigen Informationen sind folgende Fragen für uns von höchstem Interesse:

1. Kann die Existenz von Nashgleichgewichten nachgewiesen werden?
2. Sind diese Nashgleichgewichte eindeutig bestimmt?
3. Sind die gefundenen Nashgleichgewichte stabil? Das bedeutet: Kann man Nashgleichgewichte aus einem Normalspiel auf ein Spiel in anderer Form übertragen?

Um eine Antwort auf die erste Frage zu finden müssen wir den Bereich der reinen Strategien verlassen und uns mit dem Begriff der *gemischten Strategien* vertraut machen.

2.7 Definition *Sei (M, S, u) ein Spiel in Normalform. S sei endlich. Eine gemischte Strategie für $k \in M$ ist eine (formale) Summe $\sigma_k(p) = \sum_{s \in S_k} p_s \cdot s$, wobei $p \geq 0$ ist und $\sum_{s \in S_k} p_s = 1$ (und somit ist p ein Wahrscheinlichkeitsmaß).*

Nachdem wir nun wissen, was eine gemischte Strategie ist. Können wir uns *den Hauptsatz von Nash* betrachten.

2.8 Satz *Ein endliches Normalformenspiel hat immer ein Nashgleichgewicht in gemischten Strategien.*

Damit sind vorerst die wichtigsten Grundlagen der Spieltheorie behandelt, die für das Verständnis der weiteren Ausführung von Nöten sind. Im folgenden werden nun eine Auswahl von Spielen vorgestellt, die für Operations Research relevant sind.

Kapitel 3

Operations-Research-relevante Spiele

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Spiele, welche für Operations Research relevant sind, formal eingeführt. Anschließend werden die entsprechenden spieltheoretischen bzw. numerischen Lösungsverfahren vorgestellt. Um einen Praxisbezug herzustellen, wird jedes der Unterkapitel wird mit einem Beispiel abgeschlossen.

3.1 2-Personen Nullsummenspiele in Matrixform

In diesem Kapitel führen wir die 2-Personen Nullsummenspiele in Matrixform ein. Hier gehört eigentlich die Motivation her, also warum wir das machen.

3.1.1 Grundlagen der 2-Personen Nullsummenspiele

Zuerst definieren wir das 2-Personen Nullsummenspiel. Umgangssprachlich kann man es als ein Spiel bezeichnen, bei dem der Gewinn des einen den Verlust des anderen darstellt. Die mathematische Definition dieser Situation ist demzufolge:

3.1 Definition *Ein Spiel (M, S, u) heißt Nullsummenspiel, wenn $u_1 + u_2 + \cdots + u_N = 0$ gilt. Das heißt, für alle $s \in S$ gilt: $\sum_{j=1}^{N} u_j(s) = 0$*

Betrachten wir ein 2-Personen Nullsummenspiel, so ist M gegeben durch $M = \{1, 2\}$ und $u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -u_2$. Ein 2-Personen Nullsummenspiel kann immer als Spiel in Normalform aufgefasst werden. Es ist bei dieser Spielklasse bei zwei Spielern sinnvoll eine Auszahlungsmatrix oder eine Nutzenmatrix aufzustellen.

Im Weiteren werden wir uns mit Lösungsverfahren für 2-Personen Nullsummenspiele in Matrixform beschäftigten, dabei wird auch auf die exakte Gestalt der Matrix eingegangen.

3.1.2 Minimax-Strategien

Wir verwenden nun die Theorie der Zweipersonen-Nullsummenspiele (2-PNSS) unter der Annahme, dass ein Matrixspiel vorliegt (also endlich viele reine Strategien für jeden Spieler). Die Normalform eines endlichen 2-PNSS liegt in Matrixform vor. Die Zeilen stehen für die Strategien des 1. Spielers, die Spalten für die Strategien des 2. Spielers. Der Eintrag a_{ij} gibt den Gewinn von I bzw. den Verlust von II an für den Fall, dass I σ_i und II τ_j spielt.

A_I	τ_1	τ_2	τ_3
σ_1	5	1	3
σ_2	3	2	4
σ_3	-3	0	4

Hier ist (σ_2, τ_2) mit $a_{22} = 2$ ein Gleichgewichtspunkt.
Ein Strategiepaar (σ_i, τ_j) ist im Gleichgewicht genau dann, wenn a_{ij} maximal in seiner Spalte und minimal in seiner Zeile ist. a_{ij} heißt dann Sattelpunkt.

A_I	τ_1	τ_2
σ_1	4	2
σ_2	1	3

hat keine Gleichgewichtspunkte.
Spielt man ein Spiel wie letztes unter eigener Ahnungslosigkeit bezüglich der gegnerischen Aktionen, aber mit der Befürchtung, dass einen der Gegner durchschaut, dann sollte vorsichtigerweise so agiert werden:
I spielt die Strategie, bei der II ihn am wenigsten tief drücken kann
$\Rightarrow$ I spielt σ_1, denn dann kann II ihn mit τ_2 nur auf 2 drücken (dort wäre dies 3). Bei τ_1 müsste II nämlich 4 befürchten.
II hat also einen erzwingbaren „Verlustdeckel" von $3 = \min_j \{\max_i a_{ij}\}$.

3.2 Definition *Bei einem endlichen 2-PNSS besitzt Spieler I den Gewinnsockel*

$$v'_I := \max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\}$$

und Spieler II den Verlustdeckel

$$v'_{II} := \min_j \left\{ \max_i a_{ij} \right\}.$$

3.3 Lemma *Es gilt stets $v'_I \leq v'_{II}$.*

Beweis:
Sei $a_{pq} = v'_I = \max_i \{\min_j a_{ij}\} \Rightarrow a_{pq}$ ist ein Minimum in der p-ten Zeile $\Rightarrow a_{pq} \leq a_{pj} \forall j$.
Sei $a_{st} = v'_{II} := \min_j \{\max_i a_{ij}\} \Rightarrow a_{st}$ ist ein Maximum in der t-ten Spalte $\Rightarrow a_{st} \geq a_{it} \forall i$.
Insbesondere ist also $v'_{II} = a_{st} \geq a_{pt} \geq a_{pq} = v'_I$.

q.e.d.

Konsequenz: Der Gewinnsockel von I liegt allenfalls so hoch wie der Verlustdeckel von II.

3.4 Lemma *Gilt im speziellen Fall $v'_I = v'_{II}$, dann liegt der Sattelpunkt bzw. ein Gleichgewichtspunkt vor.*

Beweis:
Es gelte also $v'_I = a_{pq} = a_{st} = v'_{II}$.
Betrachte nun den Wert a_{pt}. Es gilt damit
$a_{pq} \leq a_{pt} \leq a_{st}$, also $a_{pq} = a_{pt} = a_{st}$.
Verändert I die Zeile (Strategie) p, dann kann er sich allenfalls verschlechtern, denn $a_{st} = a_{pt}$ war ja ein Spaltenmaximum (in der Spalte von t).
Würde II die Spalte t verändern und ein $a_{pt'}$ spielen, dann würde gelten $a_{pt'} \geq a_{pt}$, denn $a_{pt} = a_{pq}$ war ein Zeilenminimum (in der Zeile p).
Also ist a_{pt} ein Gleichgewichtspunkt.

q.e.d.

3.1.3 Gemischte Strategien bei 2-PNSS in Matrixform

Gemischte Strategien bei 2-PNSS sind Wahrscheinlichkeitsbelegungen für die endlich vielen Strategien. Die Charakterisierung erfolgt über einen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ mit $x_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^m x_i = 1$. Die x_i repräsentieren die Wahrscheinlichkeit, mit denen die i-te reine Strategie gewählt wird. Nun sei X die Menge aller so gemischten Strategien für I. Y sei die Menge aller so gemischten Strategien für II.

3.5 Lemma *Bei einem Spiel mit Auszahlungsmatrix $A = (a_{ij})$ hat man bei Verwendung der Gewichtungen x_i durch I und y_j durch II und -voneinander-unabhängiger Wahl der Strategien die erwarteten Auszahlungen*

$$E[A, x, y] := A(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T Ay.$$

Beweis:
Wegen der stochastischen Unabhängigkeit hat man die Multiplikativität
P(I spielt i und II spielt j)=P(I spielt i)P(II spielt j)=$x_i y_j$ Alles weitere ist Gewichtung der Spielausgänge.

Spieler I muss befürchten, dass II seine Strategie kennt. Gleiches gilt umgekehrt. Deshalb will sich I aus eigener Kraft einen möglichst hohen Gewinn sichern. Spielt er selbst, dann würde ein informierter Gegner für die Realisierung von

$$v_I(x) := \min_y x^T AY$$

sorgen. I will aber durch seine Entscheidung diesen Ausdruck maximieren, d.h. seine Aufgabe ist

$$\max_{x \in X} v_I(x) := \max_{x \in X} (\min_y x^T AY).$$

Gehen wir davon aus, dass sich I für $\bar{x}$ entscheidet oder entschieden hat. Dann müsste II den Ausdruck $\bar{x}^T Ay$ durch Wahl von $y \in Y$ minimieren. Dies ist steuerbar als (durch Gewichtung mit y) kombinierte Auszahlung von $\bar{x}^T Ae_1, \bar{x}^T Ae_2, ..., \bar{x}^T Ae_l$ (wenn II l reine Strategien hat). $\bar{x}^T A$ ist dann ein fester Vektor $\bar{d}$. Also hat II die Aufgabe, $\bar{d}^T y$ über dem Einheitssimplex $\left\{ y | \sum_{i=1}^{l} y_i = 1, y^T = 0 \right\}$ zu minimieren.
der Minimalwert hierfür wird an einer Ecke angenommen. Ecken sind in diesem Fall die l Einheitsvektoren. Dies liefert:

$$\min \left\{ \bar{x}^T Ay, \sum_{i=1}^{l} y_i = 1, y_i \geq 0 \right\} = \min \left\{ \bar{x}^T Ae_1, ..., \bar{x}^T Ae_l \right\}.$$

Nun kann das innere Minimum bestimmt werden:

$$v_I(x) := \min_y x^T Ay = \min \left\{ x^T Ae_1, ..., x^T Ae_l \right\}$$

Dies ist eine stetige Funktion, außerdem ist X kompakt.
Deshalb existiert auf X ein Maximalpunkt für $v_I(x)$, der folgendes Problem löst: $\max_{x \in X} v_I(x)$.
Umgekehrt handelt Spieler I aus der Sicht von II wie folgt: Bietet ihm II eine feste Strategie $\bar{y}$ an, dann wird I versuchen: $\max_{x \in X} x^T A\bar{y}$. Dies gelingt ihm wieder bei einer reinen Strategie, also

$$v_{II}(\bar{y}) := \max_{x \in X} x^T A\bar{y} = \max \left\{ e_1^T Ay, ..., e_k^T Ay \right\}.$$

Somit stellt sich für II die Aufgabe, die stetige Funktion $v_{II}(y)$ auf dem Kompaktum Y zu minimieren. Folglich existiert ein Minimalpunkt, der folgendes Problem löst

$$\min_{y \in Y} \left\{ \max_{x \in X} x^T Ay \right\} = \min_{y \in Y} \left\{ \max \left\{ e_1^T Ay, ..., e_k^T Ay \right\} \right\}.$$

Man beweise nun völlig analog zu Lemma 1.2 die entsprechende Aussage für die gemischte Erweiterung.

q.e.d.

Es folgen nun noch zwei wichtige Aussagen, die aber in dieser Arbeit nicht bewiesen werden, da in nahezu jeder Spieltheorie-Lektüre die beiden Beweise anzutreffen sind.

3.6 Lemma $v_I = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T Ay \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T Ay = v_{II}$.

3.7 Satz *Neumann und Morgenstern*
Bei Zweipersonen-Nullsummenspielen mit gemischten Strategien gibt es Gleichgewichtspunkte und es gilt immer $v_I = v_{II}$.

Da nun die Grundlagen über 2-PNSS in Matrixform erklärt wurden, können wir zu den $k \times l$*-Matrixspielen übergehen und anhand dieser elementare Lösungsmethoden herleiten.*

3.1.4 $k \times l$-Matrixspiele und ihre Lösung

Bemerkung: x ist optimal für Spieler I, wenn

$$\min_{y \in Y} x^T A y = \min \left\{ x^T A e_1, ..., x^T A e_l \right\} \geq v$$

bzw. wenn

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_{ij} \geq v \forall j = 1, ..., l.$$

y ist optimal für Spieler II, wenn

$$\max_{x \in X} x^T A y = \max \left\{ e_1^T A y, ..., e_k^T A y \right\} \leq v$$

bzw. wenn

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij} y_j \leq v \forall i = 1, ..., k.$$

Daraus kann man dann Optimierungsaufgaben für beide Spieler ableiten, die man dann mit dem Simplexverfahren lösen kann.

3.8 Satz *Die beiden Spieler haben folgende Aufgaben zu lösen:*
I: $\max \lambda$ *unter* $\sum_{i=1}^{k} x_i a_{ij} \geq \lambda \forall j = 1, ..., l; x_i \geq 0; \sum_{i=1}^{k} x_i = 1$
II: $\min \mu$ *unter* $\sum_{j=1}^{l} a_{ij} y_j \leq \mu \forall j = 1, ..., k; y_j \geq 0; \sum_{j=1}^{l} y_j = 1$

Beweis:
Kann man im ersten LP λ bis auf v steigern, dann hat man mit x eine Max-Min-Strategie für I. Erreicht man im zweiten LP ein $\mu \leq v$, dann ist y eine Min-Max-Strategie für II.

q.e.d.

Nun kann mann versuchen, rein rechnerisch Spielwerte und Minimax-Strategien zu ermitteln. Dies wird Aufgabe des folgenden Absatzes sein.

3.1.5 Elementare Lösungsmethoden bei Matrixspielen

Als erstes Beispiel wählen wir die leichteste Version, nämlich 2×2-Spiele. Jeder Spieler hat daher zwei Möglichkeiten. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
1. Falls man einen Sattelpunkt unter den reinen Strategien findet, nimmt man diesen. Ein anderer ist dann nicht mehr möglich. Sei z.B. a_{11} ein Sattelpunkt $\Rightarrow a_{21} \leq a_{11} \leq a_{12}$. Bliebe also nur noch a_{22}. Wäre dies ein Sattelpunkt, dann müsste gelten $a_{12} \leq a_{22} \leq a_{21}$. Bei „$<$“ wäre das ein Widerspruch.
2. Falls eine Dominanz besteht, streicht man die Zeile/Spalte und wählt dann das beste Element.
3. Wenn keine Dominanz besteht, dann müssen die beiden Zeilen und die beiden Spalten gegenläufig sein. Dabei ist allerdings die Aufteilung $\begin{array}{|ccc|} \hline & > & \\ \wedge & & \vee \\ & < & \\ \hline \end{array}$ widersprüchlich.

Es bleibt nur $\boxed{\begin{array}{ccc} g_1 & > & k_1 \\ \wedge & & \vee \\ k_2 & < & g_2 \end{array}}$ oder $\boxed{\begin{array}{ccc} k_1 & > & g_1 \\ \wedge & & \vee \\ g_2 & < & k_2 \end{array}}$.
In beiden Fällen existieren zwei kleine und zwei große Zahlen: $\min\{g_1, g_2\} > \max\{k_1, k_2\}$.
Mischt man mit $y \in (0,1)$, dann gibt es ein $\bar{y}$, wo die Mischung der ersten Zeile derjenigen der zweiten Zeile entspricht
II: $y* = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}$ für die erste Spalte.
$1 - y* = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}$ für die zweite Spalte.
Das Gleiche kann man auch mit Spalten machen.
I: $x* = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}$ für die erste Zeile.
$1 - x* = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}$ für die zweite Spalte.
Wegen

$$(a_{22} - a_{12})a_{11} + (a_{11} - a_{21})a_{12} = (a_{22} - a_{12})a_{21} + (a_{11} - a_{21})a_{22}$$

wird bei dieser y-Wahl die x-Entscheidung irrelevant. Entsprechendes leistet die x-Wahl mit $x*$ wegen

$$(a_{22} - a_{21})a_{11} + (a_{11} - a_{12})a_{21} = (a_{22} - a_{21})a_{12} + (a_{11} - a_{12})a_{22}.$$

Also hat man einen Schnittpunkt in beiden Dimensionen und Einzelabweichungen bringen nichts mehr.
Beispiel 1.8: Wir haben das folgende Spiel in Matrixform gegeben:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
$x* = (\frac{1-4}{-4} = \frac{3}{4}, \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4})$
$y* = (\frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}, \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4})$

$$v = a_{11}x*y* + a_{21}(1-x*)y* + a_{12}x*(1-y*) + a_{22}(1-x*)(1-y*) = 1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

Fazit: 2-PNSS bilden die Klasse von Spielen, für die mit Gleichgewichtspunkten ein überzeugendes und optimales Lösungskonzept vorliegt. Theoretisch ist das sehr nützlich, denn Gleichgewichtspunkte sind in den gemischten Erweiterungen abgesichert.
Von zusätzlichem Nutzen ist es, dass die Querverbindungen zur linearen Optimierung und die formelmäßige Berechnungsmöglichkeit von Minimax-Strategien und des Spielwerts ergeben eine in sich geschlossene Theorie.
Allerdings muss man in der Praxis aufpassen, ob denn immer ein absoluter Konflikt vorliegt, oder ob es nicht doch Kooperationsmöglichkeiten gibt.

3.2 Koalitionsspiele

Koalitionsspiele bilden das Herzstück der Kooperativen Spieltheorie. Dabei stehen hier nicht mehr die Einzelinteressen der Spieler im Mittelpunkt, sondern es werden Gruppierungen, also Kollektive gebildet, um den Nutzen zu steigern. Nachfolgend werden die wichtigsten Grundlagen vermittelt, sowie spieltheoretische und später numerische Lösungsverfahren vorgestellt.

3.2.1 Grundlagen der Koalitionsspiele

Koalitionsspiele sind ein Teilbereich der kooperativen Spieltheorie. Zunächst werden wir den Begriff des kooperativen Spieles definieren.

3.9 Definition *Ein kooperatives Spiel* Γ_K *ist ein Tupel* $(M, \mathcal{V})$, *wobei* $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ *mit* $m > 1$ *die Menge der Spieler darstellt und* $\mathcal{V} : \mathfrak{P}(M) \to \mathbb{R}$ *mit* $\mathcal{V}(\emptyset) = 0$ *die sogenannte charakteristische Funktion bzw. die sogenannte Koalitionsbewertung.*
Teilmengen von M *heißen Koalitionen.*
Als Auzahlung oder Zuteilung (Imputation) bezeichnet man jeden Vektor $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *mit den Eigenschaften:*
$z_i \geq \mathcal{V}(\{i\})$ *mit* $i = 1, 2, \ldots, m$ *(individuelle Rationalität) und*
$\sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(M)$ *(Gruppenrationalität oder auch kollektive Rationalität)*

Der hier verwendete Begriff der charakteristischen Funktion ist nicht mit dem selben Begriff in anderen mathematischen Gebieten vergleichbar!
Bei $|M| = m$ Spieler kann die Menger aller Koalitionsbewertungen offensichtlich durch $2^m - 1$ Parameter beschrieben werden. Sind ferner l Koalitionsbewertungen $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_l$ gegeben, dann ist für beliebige $\lambda_j \in \mathbb{R}$ auch $\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \mathcal{V}_j$ eine Koalitionsbewertung.

3.10 Satz *Die Menge der zulässigen Koalitionsbewertungen ist bei festem* M *ein Vektorraum über* $\mathbb{R}$.
Das Nullelement ist gegeben durch $\mathcal{V}_0(S) \equiv 0$ *für alle* $S \subset M$ *und eine Basis besteht zum Beispiel aus folgenden Elementen:*

$$\mathcal{V}_B : \mathfrak{P}(M) \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad \mathcal{V}_B(S) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } B \subset S \\ 0 & \textit{falls } B \not\subset S \end{cases}$$

Die Funktionen $\mathcal{V}_B$ *bezeichnet man auch als elementare Koalitionsbewertung.* B *bezeichnet in diesem Satz die Koalition B.*

Der Beweis dieses Satzes ist sehr umfangreich und bedient sich des Begriffs des Randwertes von Koalitionen. Da die Argumentation dieses Beweises allerding im weiteren Verlauf des Skripts bei der Beweisführung zur *Shapley-Formel* wichtig ist, wird dieser hier in voller Länge durchgeführt.

3.11 Definition *Unter den Randwerten von Koalitionen* B *werden folgende rekursiv definierte Größen* r_B *verstanden:*

$$\begin{aligned} r_{\{i\}}(\mathcal{V} &= \mathcal{V}(\{i\}) \qquad \forall i \in M \\ r_B(\mathcal{V}) &= \mathcal{V}(B) - \sum_{L : L \subsetneq B} r_L(\mathcal{V}) \qquad \forall B : B \subset M \wedge |B| > 1. \end{aligned}$$

Der folgende Satz liefert nur eine kleine Beweisidee und ist deswegen eher als Bemerkung zu verstehen.
Bemerkung: *Für den Randwert* r_B *einer Koalition* B *gilt:*

$$r_B(\mathcal{V} = \sum_{L : L \subset B} (-1)^{|B| - |L|} \mathcal{V}(L)$$

Der Beweis dieser Bemerkung wird durch eine Induktion über die Anzahl der Elemente der Teilmengen geführt.

Beweis zu Satz 3.10: Der Beweis gliedert sich in zwei große Schritte. Im ersten wird mit Hilfe eines Induktionsbeweises die lineare Unabhängigkeit dieser elementaren Koalitionsbewertungen gezeigt. Im zweiten Schritt zeigen wir dann, dass es für jede beliebige Koalitionsbewertung $\mathcal{V}$ geeignete $\lambda_B = \lambda_B \mathcal{V}$ gibt, so dass gilt:

$$\mathcal{V} = \sum_{B \subseteq M; B \neq \emptyset} \lambda_B \mathcal{V}_B$$

1. *Lineare Unabhängigkeit:* Es ist zu zeigen, dass

$$\mathcal{V}_0(S) = \sum_{B \subseteq M; B \neq \emptyset} \lambda_B \mathcal{V}_B(S) = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{B \subseteq M; B \neq \emptyset} \lambda_B \mathcal{V}_B(S) \right]$$

   nur für $\lambda_B = 0$ erfüllt ist. Als Erstes werden die einelementigen Koalitionen $S = \{i\}, i = 1, \ldots, m$ eingesetzt. Berücksichtig man

$$\mathcal{V}_B(\{i\}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B = \{i\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   so ergibt sich $0 = \mathcal{V}_0(\{i\}) = \lambda_{\{i\}}$.
   Nun nehmen wir an, dass bereits gezeigt wurde, dass $\lambda_B = 0 \quad \forall B : |B| \leq k$. Es gilt also:

$$\mathcal{V}_0(S) = \sum_{j=k+1}^{m} \left[\sum_{B \subseteq M; B \neq \emptyset} \lambda_B \mathcal{V}_B(S) \right]$$

   Wir setzen nun für S ein $\{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \subseteq M$ ein und erhalten für alle $B : |B| \geq 2$

$$\mathcal{V}_B(\{i_1, \ldots, i_{k+1}\}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B = \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \\ 0 & \text{falls } |B| \geq 2 \text{ und } B \neq \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \end{cases}$$

   Somit folgt aus $0 = \mathcal{V}_0(\{i\}) = \lambda_{\{i_1, \ldots, i_{k+1}\}}$ ebenfalls $\lambda_R = 0$ für alle $R : |R| = k + 1$. Letztendlich ergibt sich, dass alle $\lambda_B = 0$ sein müssen. Das war in diesem ersten Schritt zu zeigen.

2. Es wird jetzt gezeigt, dass es für jede beliebige Koalitonsbewertung $\mathcal{V}$ geeignete $\lambda_B = \lambda_B(\mathcal{V})$ gibt, so dass

$$\mathcal{V} = \sum_{B \subseteq M; B \neq \emptyset} \lambda_B \mathcal{V}_B$$

   gilt. Dafür muss gezeigt werden, dass

$$\mathcal{V}(N) = \gamma \qquad \gamma = \sum_{B : B \subset M; B \neq \emptyset} \lambda_B(\mathcal{V}) \mathcal{V}_B(N) \quad \forall N \subseteq M$$

gilt.
Für $\lambda_B(\mathcal{V})$ setzen wir

$$\lambda_B(\mathcal{V}) = \sum_{L:L\subset B} (-1)^{|B|-|L|}\mathcal{V}(L)$$

ein. Daraus ergibt sich

$$\gamma = \sum_{B:B\subseteq M;B\neq\emptyset} \sum_{L.L\subset B} (-1)^{|B|-|L|}\mathcal{V}(L)\mathcal{V}_B(N)$$

Wenn man nun die Definition von $\mathcal{V}_B(M)$ berücksichtig, so folgt weiter

$$\gamma = \sum_{B:B\subseteq M;B\neq\emptyset} \sum_{L.L\subset B} (-1)^{|B|-|L|}\mathcal{V}(L)$$

Vertauscht man nun die beiden Summen und zählt $(-1)^{|B|-|L|}$ ab, so erhält man

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{L\subset N}\left[\sum_{B:L\subset B\subset N} (-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L)\\ &= \sum_{L\subset N}\left[\sum_{b=|L|}^{|N|}\sum_{|B|=b;B:L\subset B\subset N} (-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L)\end{aligned}$$

Da eine Menge B von b Elementen, die eine Menge L enthält, aus einer Menge N auf $\binom{|N|-|L|}{b-|L|}$ verschiedene Weisen gewählt werden kann, folgt weiter

$$\gamma = \sum_{L\subset N}\left[\sum_{b=|L|}^{|N|}\binom{|N|-|L|}{b-|L|}(-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L)$$

Die Indextransformation $\beta = b-|L|$ und die Anwendung der binomischen Formel liefert

$$\sum_{b=|L|}^{|N|}\binom{|N|-|L|}{b-|L|}(-1)^{|B|-|L|} = \sum_{\beta=0}^{|N|-|L|}\binom{|N|-|L|}{\beta}(-1)^{\beta}(+1)^{|N|-|L|-\beta} =$$

$$(-1+1)^{|M|-|L|} = \begin{cases} 0 & \text{falls } |M|-|L|>0\\ 1 & \text{falls } |M|-|L|=0\end{cases}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\gamma = \sum_{L=N}\left[\sum_{b=|L|}^{|N|}\binom{|N|-|L|}{b-|L|}(-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L) + \sum_{L\subset N;L\neq N}\left[\sum_{b=|L|}^{|N|}\binom{|N|-|L|}{b-|L|}(-1)^{|B|-|L|}\right]\mathcal{V}(L)$$
$$= \mathcal{V}(N) + 0$$

Damit ist die Darstellung einer Koalitionsbewertung durch elementare Koalitionsbewertungen gezeigt. Bleibt noch die Eindeutigkeit. Diese folgt aus der Eigenschaft, dass die elementaren Koalitionsbewertungen eine Basis bilden.

q.e.d.

Wie wir aus der Lineare Algebra wissen, gibt es eine Vielzahl von verschiedenen Basen zu einem Vektorraum. Da wir in diesem Kapitel später auf die Shapley-Zuteilung eingehen möchten, ist die hier getroffene Basiswahl sinnvoll. Im weiteren Verlauf werden weitere Begriffe wie beispielsweise *Dummyspieler, Superadditivität, und wesentlich* eingeführt, die für die spätern Kapitel erforderlich sind.

3.12 Definition *Ein Spieler heißt Dummy-Spieler, falls* $\mathcal{V}(S \cup \{i\}) = \mathcal{V}(S)$ *für alle* $S \subseteq M$*.*

3.13 Definition *Ein Spieler heißt unkooperativ, falls* $\mathcal{V}(S\cup\{i\})-\mathcal{V}(S) \leq \mathcal{V}(\{i\}$ *für alle* $S \subseteq M$*.*

3.14 Definition *Eine Koalitionsbewertung (bzw. eine charakteristische Funktion einer Kooperation) bzw. ein kooperatives Spiel heißt superadditiv, wenn gilt:*

$$\mathcal{V}(S) + \mathcal{V}(T) \leq \mathcal{V}(S \cup T) \quad \forall S, T \subseteq M : S \cap T = \emptyset$$

Die Bedeutung der Superadditivität liegt darin, dass ein Zusammenschluss zu größeren Koalitionen einen Mehrwert liefert. Diese Eigenschaft kann allerdings nicht generell vorausgesetzt werden.

3.15 Definition *Ein Spiel heißt wesentlich, wenn* $\sum_{i=1}^{m} \mathcal{V}(\{i\}) < \mathcal{V}(M)$ *andersfalls heißt das Spiel unwesentlich*
Das bedeutet, die Summe der Auszahlungen für jeden Einzelnen Spieler muss kleiner sein als die Auszahlung der „großen Koalition“, denn nur dann ist eine Koalitionsbildung sinnvoll.

Zu dieser Defintion existiert ein Satz, den wir zur Begründung der Definition heranziehen.

3.16 Satz *Ein unwesentliches Spiel hat höchstens eine Imputation, nämlich* $(\mathcal{V}(\{1\}), \mathcal{V}(\{2\}), \ldots, \mathcal{V}(\{m\})$*. Ein wesentliches Spiel hat unendlich viele verschiedene Imputationen.*

Beweis: Es werde nun angenommen, dass das unwesentliche Spiel eine Imputation z habe. Dann gilt

$$\mathcal{V}(M) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathcal{V}(\{i\}) \leq \sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(M)$$

Daher muss also überall Gleichheit gelten, insbesondere $z_i = \mathcal{V}(\{i\})$, wegen $z_i \geq \mathcal{V}(\{i\})$.
Im Falle der wesentliche Spiele kann die positive Größe

$$\mathcal{V}(M) - \sum_{i=1}^{m} \mathcal{V}(\{i\}) > 0$$

auf unendlich viele verschiedene Weisen in m positive Summanden ε_i zerlegt werden, so dass sich unendlich viele verschiedene Imputationen $z_i = \mathcal{V}(\{i\}) + \varepsilon_i$ mit $i = 1, 2, \ldots, m$ ergeben.

q.e.d.

Ein kooperatives Spiel mit nur einem Spieler ist immer unwesentlich. Dies ergibt sich direkt aus der Definition von wesentlich.
Im Folgenden werden wir wichtige Begriffe im Bezug auf *Äquivalenz bei kooperativen Spielen* und *Dominanz-Äquivalenz* einführen.

3.17 Definition *Zwei kooperative Spiele $\Gamma_K(M, \mathcal{V})$ und $\widetilde{\Gamma}_K(M, \widetilde{\mathcal{V}})$ mit den gleichen Spielern M heißen strategisch äquivalent, falls es ein $k > 0$ und $c_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, 2, \ldots, m$ gibt, so dass*

$$\widetilde{\mathcal{V}}(B) = k \times \mathcal{V}(B) + \sum_{i \in B} c_i \quad \forall B \subseteq A$$

3.18 Definition *Ein kooperatives Spiel heißt Null-Spiel, wenn seine Koalitionsbewertung identisch 0 ist.*

3.19 Definition *Ein kooperatives Spiel dessen Koalitionsbewertung folgende Eigenschaften hat*

$$\mathcal{V}(\{i\}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \quad \mathcal{V}(M) = 1$$

heißt ein 0-1-reduziertes kooperatives Spiel.

3.20 Definition *Eine Imputation $x = (x_1, \ldots, x_m)$ dominiert eine Imputation $y = (y_1, \ldots, y_m)$ bezüglich der Koalition B, falls*

$$\sum_{i \in B} x_i \leq \mathcal{V}(B) \quad \textit{Bedingung der Effektivität}$$
$$x_i > y_i \quad \forall i \in B \quad \textit{Bedingung der Präferenz}$$

Wir bezeichnen diesen Sachverhalt auch mit $x \succ_B y$.

3.21 Definition *Eine Imputation x dominiert die Imputation y, in Zeichen $x \succ y$, wenn es eine Koalition B gibt, so dass $x \succ_B y$ gilt.*

Bemerkung: Die Imputationen $x = (x_1, x_2, x_3)$ eines 0-1-reduzierten kooperativen Spiels können als baryzentrische Koordinaten aufgefasst werden. Für $m = 3$ lassen sich auf diese Weise Beispiele für Dominanz und einige weitere Begriffe zeichnerisch in der Ebene darstellen. Hier sind dann die Zuteilungen die Punkte $\vec{z}$ einer Dreiecksfläche mit den Ecken $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$:

$$\begin{aligned} x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} &= \vec{z} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lässt man die Bedingung $x_i \geq 0$ mit $i = 1, 2, 3$ fallen, so durchläuft $\vec{z}$ alle Punkte der Ebene. Ferner erkennt man durch Nachrechnen, dass die Menge der Punkte $x_1 = \textit{constant}$ eine zum Vektor $\vec{a_2} - \vec{a_3}$ parallele Gerade ist. Selbiges gilt analog für x_2, x_3. Abbildung 3.1 zeigt den eben beschriebenen Sachverhalt.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich damit, welche Lösungsverfahren existieren, um sich aus kooperativen Spielen rationale Entscheidungen ableiten zu können.

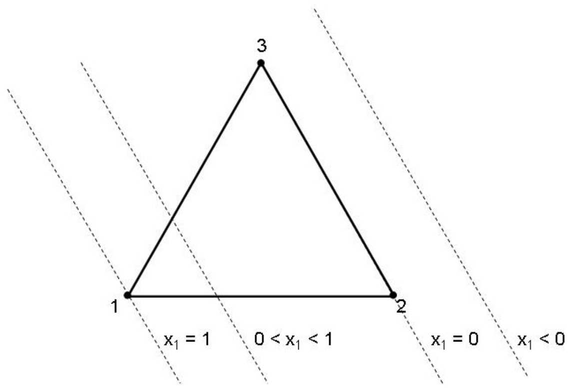

Abbildung 3.1: Baryzentrische Koordinaten

3.2.2 Spieltheoretische Lösungsverfahren für Koalitionsspiele

In diesem Abschnitt werden spieltheoretische Lösungsverfahren für kooperative Spiele und somit auch für Koalitionsspiele vorgestellt. Es existieren in Spieltheorie drei verschiedene Lösungsverfahren: Das Auffinden von Lösungen mit Hilfe des Kerns eines kooperativen Spiels, die von-Neumann-Morgenstern Lösung (VNM-Lösung) und die Shapley-Zuteilung. Zuerst stellen wir das Verfahren mit Hilfe des Kerns eines kooperativen Spiels vor.

Der Kern eines kooperativen Spiels

Es gilt den gewonnen Nutzen (bzw. Kapital) auf alle Teilnehmer einer Koalition zu verteilen. Der Nutzen sei definiert als $\mathcal{V}(M) = \sum_{i=1}^{m} z_i$. Jeder Spieler i hat selbstverständlich das Bestreben, dass sein Anteil z_i möglichst groß ist. Eine Art „Nash-Gleichgewicht“ wäre im Fall der kooperativen Spiele eine Verteilung, bei der sich nicht jeder Spieler gleichzeitig verbessern kann. Diese Verteilung kann also nicht dominiert werden.

3.22 Satz *Alle Zuteilungen z, die die Ungleichung*

$$\mathcal{V}(B) \leq \sum_{i \in B} z_i \quad \forall B \subseteq M$$

erfüllen, werden nicht dominiert.

Beweis: Eine dominierte Zuteilung müsste insbesondere für eine Koalition B die Bedingung $\mathcal{V}(B) > \sum_{i \in B} z_i$ erfüllen. Dies trifft jedoch für die Zuteilung, die die Ungleichung aus Satz 3.22 erfüllt nicht zu.

q.e.d.

3.23 Definition *Bei einem allgemeinen kooperativen Spiel Γ_K heißt die Menge* *der Imputationen z, die die linearen Ungleichungen*

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(M)$$
$$\sum_{i \in B} z_i \geq \mathcal{V}(B) \quad \forall B \subseteq M$$

erfüllen, der Kern $\mathcal{K}(\Gamma_K)$ des Spiels.

Da unwesentliche Spiele höchstens eine Imputation besitzen, werden wir im folgenden ausschließlich wesentliche Spiele betrachten.

3.24 Satz *Der Kern eines kooperativen Spieles ist konvex und genau dann nicht leer, wenn das Optimierungsproblem*

$$\sum_{i \in B} z_i \geq \mathcal{V}(B) \quad \forall B \subseteq M$$
$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to \min_{(z_1,\ldots,z_m)}$$

eine Lösung mit einem minimalen Zielfunktionswert $\mathcal{V}(M)$ hat.

Beweis: Der Kern ist konvex, da er durch lineare Ungleichungen definiert ist. Das Ungleichungssystem hat immer eine Lösung nämlich

$$z_i = \max_{B: B \subseteq M \wedge i \in B} \mathcal{V}(B).$$

Die Ungleichungen enthalten auch die Bedingung

$$\sum_{i \in M} z_i \geq \mathcal{V}(B),$$

so dass der Zielwert beschränkt ist. Damit eine Zuteilung vorliegt, muss die Zielfunktion diese untere Grenze annehmen.

q.e.d.

3.25 Satz *Gegeben sei ein Dreipersonen-Spiel in 0-1-reduzierter Form:*

$$\mathcal{V}(\{i\}) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \qquad \mathcal{V}(\{1, 2, 3\}) = 1.$$

Zudem gilt: $\mathcal{V}(\{2, 3\}) = \alpha_1$, $\mathcal{V}(\{1, 3\}) = \alpha_2$ und $\mathcal{V}(\{1, 2\}) = \alpha_3$ wobei
$0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$
Der Kern ist genau dann nicht leer, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 2$.

Beweis: Eine Imputation z gehört genau dann zum Kern, wenn

$$z_1 + z_2 \geq \alpha_3 \qquad z_1 + z_3 \geq \alpha_2 \qquad z_2 + z_3 \geq \alpha_1$$

Berücksichtigt man $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ dann ergibt sich

$$z_3 \leq 1 - \alpha_3 \qquad z_2 \leq 1 - \alpha_2 \qquad z_1 \leq 1 - \alpha_1.$$

Summiert man die letzte Ungleichungskette auf, so erhält man $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leq 2$. Geht man allerdings von $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leq 2$ aus, so kann man einen Punkt angeben der im Kern liegt:
Es gibt $\varepsilon_i \geq 0$, $\alpha_i + \varepsilon_i \leq 1$ mit $i = 1, 2, 3$, so dass

$$\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i + \varepsilon_i) = 2 \qquad z_i = 1 - \alpha_i - \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Man rechnet leicht nach, dass z eine Imputation ist und die Ungleichungskette

$$z_3 \leq 1 - \alpha_3 \qquad z_2 \leq 1 - \alpha_2 \qquad z_1 \leq 1 - \alpha_1.$$

erfüllt. Also liegt z im Kern.

q.e.d.

Graphische Darstellung des Kerns

Die geometrische Gestalt des Kerns eines allgemeinen Dreipersonenspiels hängt von der Lage der folgenden Geraden ab. Jede dieser Geraden ist parallel zu einer Dreiecksseite.

$$g_1 = \{(z_1, z_2, z_3)|z_1 = 1 - \alpha_1\}$$
$$g_2 = \{(z_1, z_2, z_3)|z_2 = 1 - \alpha_2\}$$
$$g_3 = \{(z_1, z_2, z_3)|z_3 = 1 - \alpha_3\}$$

Deshalb kann der Kern entweder ein einzelner Punkt, ein Geradenstück, ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck, oder ein Sechseck sein. Graphisch veranschaulicht ist lediglich der Fall, dass der Kern ein Sechseck bildet. (vgl. Abbildung 3.2)

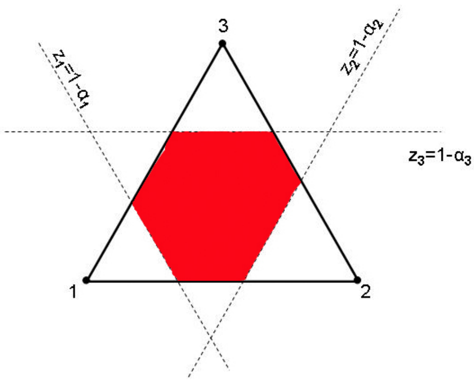

Abbildung 3.2: Möglicher Kern eines Dreipersonenspiels

Für die nachfolgenden Sätze und Definitionen formulieren wir das Opitmierungsproblem aus Satz 3.24 um. Das dort beschriebene Optimierungsproblem lässt sich wie folgt umformen. Mit Hilfe der Funktion

$$\mathbf{1}_B(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in B \\ 0 & \text{falls } i \notin B \end{cases}$$

folgt für das Optimierungsproblem:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_B(i) z_i \geq \mathcal{V}(B) \quad \forall B \subseteq M$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to \min_{(z_1,\dots,z_m)}$$

Das dazu duale Problem ist:

$$\sum_{B:B\subseteq M} \mathbf{1}_B(i) y_B = 1 \quad i = 1,\dots,m$$

$$y_B \geq 0$$

$$\sum_{B:B\subseteq M} \mathcal{V}(B) y_B \to \max_{y_B:B\subseteq M}$$

3.26 Definition *Jeder Koalition $B \subseteq M$ sei eine Zahl $\lambda_B \geq 0$ zugeordnet. Diese Menge $(\lambda_B)_{B\subseteq M}$ von Zahlungen heißt eine Kollektion von ausgleichenden Gewichten, wenn die Bedingung*

$$\sum_{B:B\subseteq M} \lambda_B \mathbf{1}_B(i) = 1 \qquad \forall i \in M.$$

gilt. Die Menge $\mathcal{B} = \{B|\lambda_B > 0\}$ von Koalitionen wurde manchmal ebenfalls als ausgeglichen bezeichnet.

Eine Menge $\mathcal{B}$ von Koalitionen, die eine Zerlegung von M ist, ist immer ausgeglichen mit den ausgleichenden Gewichten:

$$\lambda_B = \begin{cases} 1 & \text{falls } B \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beachte dabei, dass der Spieler i nur zu genau einer Koalition gehört.

3.27 Definition *Ein kooperatives Spiel $(M, \mathcal{V})$ heißt ausgeglichen, wenn für jede Kollektion $(\lambda_B)_{B\subseteq M}$ von ausgleichenden Gewichten die Ungleichung*

$$\sum_{B:B\subseteq m} \lambda_B \mathcal{V}(B) \leq \mathcal{V}(M)$$

gilt.

3.28 Satz *Der Kern eines kooperativen Spiels ist genau dann nichtleer, wenn das Spiel ausgeglichen ist.*

Beweis:

„⇒“ Sei nun der Kern nicht leer und x eine Zuteilung aus dem Kern uns $\mathcal{B}$ eine ausgeglichene Menge von Koalitionen mit den ausgleichenden Gewichten

$(\lambda_B)_{B\in\mathcal{B}}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda_B \mathcal{V}(B) \leq \sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda_B x(B) = \sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda_B \left(\sum_{i\in B} x_i\right) = \\
= \sum_{i\in M} x_i \left(\sum_{B:i\in B} \lambda_B\right) = \\
= \sum_{i\in M} x_i \quad \underbrace{\left(\sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda_B 1_B(i)\right)}_{=1 \quad \text{nach Definition 3.26}} \\
= \sum_{i\in M} x_i = \mathcal{V}(M).
\end{aligned}$$

Zusammengefasst heißt das

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda_B \mathcal{V}(B) \leq \mathcal{V}(M)$$

für beliebige ausgeglichene Mengen $\mathcal{B}$. Dies ist die Bedingung des Satzes.

„$\Leftarrow$“ Sei nun das Spiel ausgeglichen, dann hat das Opitmierungsproblem

$$z(y) = \sum_{S:S\subset M} \mathcal{V}(S) y_S \to \max_{y_S, S\subseteq M}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{S:S\subset M} I_S(i) y_S = 1 \qquad i = 1, \ldots, m \qquad y_S \geq 0 \quad \forall S : S \subseteq M$$

eine optimale Lösung mit dem Zielwert $\mathcal{V}(M)$. Das dazu duale Problem

$$z_d(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min_{x_i\in\mathbb{R}, i=1,\ldots,m}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{m} I_S(i) x_i \geq \mathcal{V}(S), \quad \forall S : S \subseteq M$$

hat dann ebenfalls eine optimale Lösung $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ mit dem Zielwert $\mathcal{V}(M)$. Diese optimale Lösung erfüllt insbesondere auch alle Nebenbedingungen. Beachtet man, dass

$$\sum_{i=1}^{m} I_S(i) x_i = \sum_{i\in S} x_i$$

gilt, so erkennt man, dass diese optimale Lösung im Kern des Spiels liegt und der Kern somit nicht leer ist.

q.e.d.

von-Neumann-Morgenstern-Lösungen (VNM-Lösungen)

Eine weitere Möglichkeit die Verteilung des Gewinns vorzunehmen ist die *von-Neumann-Morgenstern-Lösung* (kurz: VNM-Lösung). Da der Kern nur eine sogenannte innere Stabilität - das heißt, keine Auszahlung aus $\mathcal{K}$ dominiert irgend eine andere Auszahlung aus $\mathcal{K}$ - besitzt. Da es aber sein kann, dass es für irgendeine Auszahlung y unter Umständen keine Auszahlung $z \in \mathcal{K}$ gibt mit $z \succ y$. Deshalb wurde die VNM-Lösung entwickelt.

3.29 Definition *Die VNM-Lösung eines kooperativen Spieles nennt man die Menge $\mathcal{R}$ von Imputationen, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(1) *Keine Imputation aus $\mathcal{R}$ dominiert irgend eine andere Imputation aus $\mathcal{R}$.*

(2) *Zu jeder Imputation $x \notin \mathcal{R}$ gibt es eine Imputation $z \in \mathcal{R}$, die x dominiert: $z \succ x$.*

3.30 Satz *Wenn die VNM-Lösung $\mathcal{R} \neq \emptyset$ ist, dann gilt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$.*

Beweis: Wenn $\mathcal{K} = \emptyset$, dann gilt in jedem Fall $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$.
Ist eine Auszahlung $z \in \mathcal{K}$, dann wird sie von keiner anderen Auszahlung dominiert. Wäre $z \notin \mathcal{R}$, dann würde z von einer Auszahlung aus $\mathcal{R}$ dominiert. Dies ist ein Widerspruch, deshalb muss gelten: $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{R}$.

q.e.d.

3.31 Satz *Wenn die VNM-Lösung $\mathcal{R}$ eines kooperativen Spieles nur aus einer einzigen Imputation besteht, dann ist das Spiel unwesentlich.*

Beweis: Wir nehmen nun an, dass das Spiel wesentlich ist und o.B.d.A. in der 0-1-reduzierten Form vorliegt. Insbesondere ist damit auch $m > 1$. Sei nun z die einzige Auszahlung und für ein j sei $z_j > 0$. Ein solches j gibt es wegen der Eigenschaften einer Auszahlung. Hieraus konstruieren wir nun eine neue Auszahlung y:

$$y_i = \begin{cases} z_i + \frac{z_j}{m-1} & \text{falls } i \neq j \\ 0 & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

Man rechnet nach, dass y nicht von z dominiert ist. Daher muss entweder $y \in \mathcal{R}$ sein oder es gibt eine weitere Auszahlung x, die y dominiert und zu $\mathcal{R}$ gehört. In beiden Fällen enthält $\mathcal{R}$ mindestens 2 Auszahlungen im Widerspruch zur Annahme. Deshalb muss das Spiel unwesentlich sein.

q.e.d.

Die Shapley-Zuteilung

Shapley gab im Jahr 1953 eine Formel zu Berechung für eine Auszahlung an, die sich aus vier Axiomen eindeutig ergibt. Um die Axiome formulieren zu können, ist eine weitere Definition nötig:

3.32 Definition *Sei π eine Permutation der Spieler. πB sei das Bild der Koalition B unter dieser Permutation. π heißt ein Automorphismus der Koalitionsbewertung $\mathcal{V}$, wenn*

$$\mathcal{V}(\pi B) = \mathcal{V}(B) \qquad \forall B \subseteq M.$$

Es folgen die Axiome von Shapley:

3.33 Definition *Gegeben sie ein kooperatives Spiel $\Gamma_K = (M, \mathcal{V})$. Eine Zuteilung $\Phi(\mathcal{V}) = (\Phi_1(\mathcal{V}), \Phi_1(\mathcal{V}), \ldots, \Phi_m(\mathcal{V}))$ für dieses Spiel, die die folgenden Bedingungen erfüllt, heißt Shapley-Zuteilung (bzw. Shapley-Wert):*

(1) ***Axiom der Effizienz:***

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi_i(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(M)$$

(2) ***Axiom des Dummy-Spielers:*** *Für jeden Spieler i mit*

$$\mathcal{V}(B) = \mathcal{V}(B \setminus \{i\}) \qquad \forall B : B \subseteq M \wedge i \in B$$

gilt $\Phi_i(\mathcal{V}) = 0$

(3) ***Axiom der Symmetrie:*** *Für jeden Automorphismus π von $\mathcal{V}$ gilt: $\Phi_i(\mathcal{V}) = \Phi_{\pi i}(\mathcal{V})$*

(4) ***Axiom der Additivität:*** *Sind $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ zwei Koalitionsbewertungen für die gleiche Spielermenge, dann soll gelten:*

$$\Phi(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \Phi(\mathcal{V}) + \Phi(\mathcal{W})$$

3.34 Satz ***(Formel der Shapley Zuteilung)*** *Die Shapley-Zuteilung $\Phi(\mathcal{V})$ ist für jedes Spiel gegeben durch folgende Berechnungsformel:*

$$\Phi_i(\mathcal{V}) = \sum_{B : B \subset M} (\mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(B \setminus \{i\})) \frac{(|B| - 1)!(m - |B|)!}{m!} \tag{3.1}$$

mit $i = 1, \ldots, m$

Beweis: Da jede Koalitionsbewertung durch eine Linearkombination elementarer Koaltionsbewertungen dargestellt werden kann, zeigen wir zum Beweis der Eindeutigkeit des Shapley-Werts, dass aus den Axiomen für die elementaren Koalitionsbewertungen eine eindeutige Zuteilung folgt.
Für eine gegebene Koalition B betrachten wir nun die gestreckte elementare Koalitionsbewertung

$$\mathcal{V}_B : \mathfrak{P}(M) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{V}_B(L) = \begin{cases} \lambda & \text{falls } B \subset L \\ 0 & \text{falls } B \not\subset L \end{cases}$$

Aus dem Axiom für Dummy Spieler folgt:

$$\Phi_i(\mathcal{V}_B) = 0 \qquad \forall i \notin B$$

Aus dem Axiom der Effizienz folgt unter Einbeziehung dieses Ergebnisses:

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi_i(\mathcal{V}_B) = \sum_{i \in B} \Phi_i(\mathcal{V}_B) = \mathcal{V}_B(M) = \lambda$$

Wir betrachten nun Automorphismen π, die alle $i \in B$ permutieren, aber die $i \notin B$ unverändert lassen. Dann gilt:

$$\pi B = B \quad \Rightarrow \quad (B \subseteq L \Leftrightarrow B \subseteq \pi L)$$

Hieraus folgt weiter

$$\mathcal{V}_B(L) = \mathcal{V}_B(\pi L)$$

und nach dem Axiom der Symmetrie ergibt sich die Shapley-Zuteilung zu

$$\Phi_i(\lambda \mathcal{V}_B) = \begin{cases} \frac{\lambda}{|B|} & \text{falls } i \in B \\ 0 & \text{falls } i \notin B \end{cases}$$

Aus den Axiomen haben wir also eine eindeutige Shapley-Zuteilung für die elementaren Koalitionsbewertungen hergeleitet. Da diese eine Basis des Vektorraums der Koalitionsbewertungen ist, so ist auch die Eindeutigkeit für beliebige Koalitionsbewertungen bewiesen.
Im zweiten Schritt wird nachgewiesen, dass die in (3.1) angegebene Zuteilung die Axiome erfüllt. Hierzu betrachten wir die Darstellung einer beliebigen Koalitionsbewertung als Linearkombination der elementaren Koalitionsbewertung aus Satz 3.10 die damals lautete:

$$\mathcal{V}_B : \mathfrak{P}(M) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{V}_B(S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B \subset S \\ 0 & \text{falls } B \not\subset S \end{cases}$$

$$\mathcal{V} = \sum_{B \subseteq M} \lambda_B \mathcal{V}_B$$

Nun bringen wir das noch nicht verwendete Axiom der Additivität ins Spiel:

$$\Phi_i(\mathcal{V}) = \sum_{B \subseteq M} \Phi_i(\lambda_B \mathcal{V}_B) = \sum_{B \subseteq M; i \in B} \frac{\lambda_B}{|B|}$$

Verwendet man nun die Darstellung des Randwerts $r_B(\mathcal{V}) = \sum_{L:L \subset B} (-1)^{|B|-|L|} \mathcal{V}(L)$ für λ_B und vertauscht anschließend die beiden Summationen, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Phi_i(\mathcal{V}) &= \sum_{B \subseteq M; i \in B} \frac{1}{|B|} \left[\sum_{L \subset B} (-1)^{|B|-|L|} \mathcal{V}(L) \right] \\ &= \sum_{L \subset M} \left[\sum_{B: L \cup \{i\} \subset B} \frac{1}{|B|} (-1)^{|B|-|L|} \right] \mathcal{V}(L) \end{aligned}$$

Es gibt genauso viele Teilmengen L von B ohne i wie mit i. Wenn $i \in L$ ist, dann gilt

$$\gamma_i(L) = \sum_{B: L \cup \{i\} \subset B} \frac{1}{|B|} (-1)^{|B|-|L|} = -\gamma_i(L \backslash \{i\})$$

und berücksichtigt man $\mathcal{V}(L) = \mathcal{V}(L \backslash \{i\})$, falls $i \notin L$, so folgt weiter

$$\Phi_i(\mathcal{V}) = \sum_{L \subset M} \gamma_i(L)((V)(L) - \mathcal{V}(L \backslash \{i\})).$$

Nach der Argumentation aus dem Beweis zu Satz 3.10 ergibt sich

$$\gamma_i(L) = \sum_{b=|L|}^{m} \frac{1}{b}(-1)^{b-|L|} \binom{m-|L|}{b-|L|}.$$

Wir verwenden nun

$$\frac{1}{b} = \int_0^1 x^{b-1} dx,$$

und die binomische Formel und setzen $l = |L|$.

$$\begin{aligned}
\sum_{b=1}^{m} \frac{1}{b}(-1)^{b-l} \binom{m-l}{b-l} &= \sum_{b=1}^{m} \int_0^1 x^{b-1} dx (-1)^{b-l} \binom{m-l}{b-l} \\
&= \int_0^1 \left[\sum_{b=1}^{m} x^{b-l}(-1)^{b-l} \binom{m-l}{b-l} \right] x^{l-1} dx \\
&= \int_0^1 (1-x)^{m-l} x^{l-1} dx = \frac{(m-l)!(l-1)!}{m!}.
\end{aligned}$$

Das zuletzt angegebene Integral stellt die sogenannte Betafunktion dar, die für ganzzahlige m und l den angeführten Wert hat. Hieraus folgt schließlich die Behauptung.

q.e.d.

3.3 Das Simplexverfahren

Ein wichtiges Teilgebiet der Operations Research ist die lineare Programmierung. Modelle dazu werden in der Praxis häufig angewendet und große Computerhersteller liefern fertige Softwarepakete zur Lösung von linearen Optimierungs-Modellen, die auch bei großen Variablen (bis zu 10000 Variablen und Nebenbedingungen) einsetzbar sind.
In diesem Kapitel wollen wir nun auf einige Modelle und Verfahren zur Lösung von linearen Optimierungs-Problemen eingehen.

3.3.1 Das Simplextableau

Das Simplex Verfahren besteht darin, sich durch Basiswechsel jeweils von einer Basislösung zu einer benachbarten besseren Basislösung zu bewegen, bis das sogenannte Optimalitätskriterium erfüllt ist oder das Problem als unbeschränkt erkannt wird. Um die nötigen Basiswechsel effizient durchführen zu können und Optimalität und Unbeschränktheit zu erkennen, führen wir das so genannte „Simplextableau“ ein.
Die Zielfunktion im Simplextableau soll analog zu den Nebenbedingungen behandelt werden. Dazu benötigt man eine „künstliche“ Variable z, die den Zielfunktionswert repräsentiert. Daher kann man dann die Zielfunktion folgendermaßen schreiben:

$$-z + c_1 x_1 + ... + c_n x_n = 0.$$

Eben diese Zielfunktion wird dann zusammen mit den Nebenbedingungen in eine Matrix geschrieben, die man das *Ausgangstableau* nennt. Die erste Spalte besteht aus einer Eins und ansonsten nur aus Nullen, da die künstliche Variable z nur in der Zielfunktion vorkommt.

$$T = \begin{array}{|c|ccc|c|} \hline 1 & c_1 & \dots & c_n & 0 \\ \hline 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & . & & & \vdots \\ 0 & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & c^t & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{A} & \mathrm{b} \\ \hline \end{array}$$

Die Einträge im Ausgangstableau werden mit t_{ij} bezeichnet, wobei der Zeilenindex i von 0 bis m läuft (die 0-te Zeile enthält die Koeffizienten der Zielfunktion) und der Spaltenindex j Werte von 0 bis $n+1$ annimmt. Dieses Ausgangstableau kann in ein passendes Tableau für jede Basis B umgeschrieben werden.

Notation: Ist B eine Basis, so bezeichnen wir mit T_B das Tableau, das nur die Spalten enthält, die zu der künstlichen Variable z und zu den Basisvariablen gehören, d.h.

$$T_B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & c_B^t \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_B \\ 0 & \end{array} \right), T_B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}.$$

Da A_B nach Voraussetzung regulär ist, ist auch T_B regulär. Die Inverse von T_B hat folgende Gestalt:

$$T_B^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & c_B^t \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_B^{-1} \\ 0 & \end{array} \right)$$

Mit der Hilfe von T_B ist man in der Lage, das Ausgangstableau T in die zur Basis B passende Form zu bringen.

3.35 Definition *Ist B eine Basis, so ist*

$$T(B) := T_B^{-1}T = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & c^t - c_B^t A_B^{-1} A & -c_B^t A_B^{-1} b \\ \hline 0 & & \\ \vdots & A_B^{-1} A & A_B^{-1} b \\ 0 & & \end{array} \right)$$

das zu B gehörende Simplextableau.

Ist diese Darstellung $T(B)$ nützlich? Wozu kann sie verwendet werden? Zuerst kann man bemerken, dass $T(B)$ dasselbe Gleichungssystem wie T repräsentiert, da die Multiplikation mit der regulären Matrix T_B^{-1} keinen Einfluss auf dessen Lösung hat. In dieser nun vorliegenden Darstellung lassen sich aber die Werte der Variablen in der Basislösung B anhand der Einträge in der letzten Spalte von $T(B)$ ablesen. Bei genauerem Betrachten der Einträge von $T(B)$ wird dies deutlich:

- Die erste Spalte ist immer $(1, 0, ..., 0)^t$: Sie drückt daher den Gleichungscharakter der Zielfunktion aus. Diese verändert sich nie und kann daher im folgenden

vernachlässigt werden.
- Nun betrachte man die Spalten, die zu den Basisvariablen gehören, z.B. die Spalte zur i-ten Basisvariablen, $j = B(i)$. Es gilt:

$$A_B^{-1} A_j = (\tilde{a}_{1j}, ..., \tilde{a}_{mj})^t; c_j - c_B^t A_B^{-1} A_j = \bar{c_j}$$

Daher erkennt man die zu einer Basis gehörenden Spalten daran, dass sie in der Zielfunktionszeile eine Null stehen haben und darunter ein Einheitsvektor folgt.
- Für die Spalte, die zur i-ten Nichtbasisvariablen gehört, also $j = N(i)$, gilt:

$$A_B^{-1} A_j = (\tilde{a}_{1j}, ..., \tilde{a}_{mj})^t; c_j - c_B^t A_B^{-1} A_j = \bar{c_j}$$

Man kann daher in den nicht zu den Basisvariablen gehörenden Spalten die reduzierten Kosten ablesen.
- Schließlich gilt für die letzte Spalte:

$$A_B^{-1} b = x_B = \tilde{b}; -c_B^t A_B^{-1} b = c_b^t x_B$$

Der negative Zielfunktionswert der Basislösung (x_B, x_N) lässt sich also in der Kostenzeile der letzten Spalte ablesen. Die Werte für die Basisvariablen $x_{B(1)}, ..., x_{B(m)}$ dieser Basislösung stehen in den Zeilen 1,...,m der letzten Spalte.

Diese Beobachtungen können nun an einem Beispiel verdeutlicht werden.
Beispiel 1: Wir betrachten das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{gathered}\text{min: } -x_1 + 2x_2 \\ \text{sd: } x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0\end{gathered}$$

Bevor man Basislösungen bestimmen kann, muss das lineare Problem erst in Standardform gebracht werden.

$$\begin{gathered}\text{min: } -x_1 + 2x_2 \\ \text{sd: } x_1 + x_2 + x_3 + 0 + 0 = 2 \\ x_1 - x_2 + 0 + x_4 + 0 = 1 \\ 0 + x_2 + 0 + 0 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{gathered}$$

Daraus ergeben sich die Vektoren c,b und die Matrix A wie folgt:

$$c^t = (-1, 2, 0, 0, 0), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Ausgangstableau lautet daher wie folgt:

T=

1	-1	2	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	2
0	1	-1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1

Dieses Tableau ist schon ein Tableau bezüglich einer Basis, nämlich bezüglich der Basis $B = \{3,4,5\}$. Das erkennt man daran, dass die Spalten 3,4 und 5 den ersten, zweiten und dritten Einheitsvektor enthalten und in der Kostenzeile dieser Spalten jeweils eine Null steht. Da in der dritten Spalte der erste Einheitsvektor steht, gilt B(1)=3 und der Wert der Basisvariablen $x_3 = x_{B(1)}$ lässt sich in der letzten Spalte ablesen, also $x_3 = x_{B(1)} = \tilde{b_1} = t_{1n+1} = 2$. Für die anderen Werte der Basisvariablen ergibt sich entsprechend

$$x_4 = x_{B(2)} = \tilde{b_2} = t_{2n+1} = t_{26} = 1,$$
$$x_5 = x_{B(3)} = \tilde{b_3} = t_{3n+1} = t_{36} = 1.$$

Der Zielfunktionswert der Basislösung ist $t_{0n+1} = t_{06} = 0$.
Jetzt formulieren wir das Ausgangstableau zum Tableau für die Basis B=(1,2,4) um. Wir bestimmen

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c_B^t A_B^{-1} = (-1,2,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1,0,3)$$

$$T_B^{-1} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right\}.$$

Nun kann man das Tableau T(B) bilden als

T(B)=

1	0	0	1	0	-3	-1
0	1	0	1	0	-1	$1 \leftarrow \tilde{b_1}$
0	0	1	0	0	1	$1 \leftarrow \tilde{b_2}$
0	0	0	-1	1	2	$1 \leftarrow \tilde{b_3}$

Um nun die zugehörige Basislösung ablesen zu können, muss man sich zuerst die Basisvariablen und die Nichtbasisvariablen klar machen:
- Nichtbasisvariablen $N = \{3,5\} \Rightarrow N(1) = 3, N(2) = 5$
- Basisvariablen $N = \{1,2,4\} \Rightarrow B(1) = 1, B(2) = 2, B(3) = 4$

Die Werte der Basislösung lassen sich nun wie folgt ablesen:

$$x_1 = x_{B(1)} = \tilde{b_1} = t_{16} = 1,$$
$$x_5 = x_{B(3)} = \tilde{b_3} = t_{3n+1} = t_{36} = 1.$$

Da sie Nichtbasisvariablen sind, gilt $x_3 = x_5 = 0$. Die Basislösung zur Basis B=(1,2,4) ist also $x = (1,1,0,1,0)^t$. Den Zielfunktionswert der Lösung kann man entweder berechnen,

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1,$$

oder direkt als das Negative von $t_{06} = -1$ im Tableau ablesen.

Bezüglich der Optimalität sieht man, dass beide Tableaus negative reduzierte Kosten in der 0-ten Zeile haben. Daher kann man also nicht folgern, dass eine der beiden Lösungen optimal ist und man wird versuchen, sie durch Basiswechsel zu verbessern.

Ein Nachteil des ganzen ist, dass die Berechnung der Inversen aufwändig ist, so dass die Bestimmung des Simplextableaus für eine Basis B anhand der Definition nicht zu empfehlen ist.
Da ist es natürlich von Vorteil, dass man ein Tableau zu einer Basis B auch ohne Kenntnis der Inversen bestimmen kann. Wie so ein Basiswechsel effizient gemacht werden kann, wird nun im folgenden beschrieben.
Man betrachte dazu ein Tableau T(B) zu einer Basis B, und nehme an, dass das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist, d.h. dass ein $t_{0j} < 0$ für ein $j \in \{1, ..., n\}$ existiert. Deswegen erscheint eine Verbesserung durch einen Basiswechsel möglich. Dazu soll die Spalte j in die Basis aufgenommen werden, d.h. man will die derzeitige Nichtbasisvariable von $x_j = 0$ auf einen neuen Wert $x_j = \delta$ erhöhen. Dazu wendet man die sogenannte Quotientenregel (diese wird nur erwähnt, nicht im Detail eingeführt) an:

$$\delta = \min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \frac{\tilde{b_i}}{\tilde{a_{ij}}} : \tilde{a_{ij}} > 0 \right\} = \min_{i=1,\ldots,m} \left\{ \frac{t_{i(n+1)}}{t_{ij}} : t_{ij} > 0 \right\},$$

Diese kann man direkt anhand der Werte im Tableau durchführen. Dieses Problem ist nun unbeschränkt, wenn alle $t_{ij} \leq 0$ sind. Nehmen wir also an, dass $\delta = \frac{t_{r(n+1)}}{t_{rj}}$, d.h. B(r) soll die Basis verlassen. Nun kann man, anstatt das Tableau zur neuen Basis $B' = B \setminus \{B(r)\} \cup \{j\}$ ausgehend vom Starttableau T neu zu berechnen, eine *Pivotoperation* mit dem *Pivotelement* t_{rj} durchführen. Diese Vorgehensweise wurde bereits in Numerik ausführlich behandelt. Hierbei verwandelt man durch elementare Zeilenumformungen die j-te Spalte von T(B) in den r-ten Einheitsvektor mit Kosten $t_{0j} = 0$. Das resultierende Tableau repräsentiert ein äquivalentes Gleichungssystem (da die Anwendung elementarer Zeilenoperationen nichts anderes als die Multiplikation mit regulären Matrizen ist).
Es ergibt sich nun das Tableau $T(B')$, da die anderen Basisspalten nicht verändert wurden.
Dies wird jetzt anhand der vorangehenden Beispiels verdeutlicht:
Beispiel 2: Nun wird das Beispiel 1 fortgesetzt, indem man mit dem Tableau zur Basis $B = \{1, 2, 4\}$ startet.

T=

1	0	0	1	0	-3	-1
0	1	0	1	0	-1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	-1	1	**2**	1

Die Basislösung $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ mit Zielfunktionswert $c^t x = 1$ wurde bereits bestimmt. Da $t_{05} < 0$, also die reduzierten Kosten der Nichtbasisvariable x_5 negativ sind, will man den Wert für x_5 erhöhen und diese Variable in die neue Basis bringen. Daher wählt man $j = 5$ und nach der Quotientenregel ergibt sich

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2},$$

also $r = 3$ und die Variable $x_{B(3)} = x_4$ soll die Basis verlassen. Das Pivotelement ist somit $t_{rj} = t_{35} = 2$.
Um die fünfte Spalte zu dem dritten Einheitsvektor zu transformieren, ohne die Einheitsvektoren in den Spalten 1 und 2 zu verändern, geht man bei der *Pivotfaktorisierung* folgendermaßen vor:
Teile zuerst die letzte Zeile durch 2. Danach addieren man die neu entstandene letzte Zeile drei mal zu Zeile 0, ein mal zu Zeile 1 und -1 mal zu Zeile 2. Daraus ergibt sich ein neues Tableau:

1	0	0	-1/2	3/2	0	1/2
0	1	0	1/2	1/2	0	3/2
0	0	1	**1/2**	-1/2	0	1/2
0	0	0	-1/2	1/2	1	1/2

Dieses Tableau ist das Tableau $T(B')$ zur Basis $B' = \{1, 2, 5\}$. Die Werte der Basisvariablen kann man nun wieder anhand der letzten Spalte ablesen, so dass sich mit $x_1 = 3/2, x_2 = 1/2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1/2$ die zugehörige Basislösung ergibt. Der Zielfunktionswert beträgt $c^t x = -1/2$. Da die reduzierten Kosten der Variablen x_3 mit $t_{03} = -1/2 < 0$ negativ sind, wählen wir im nächsten Schritt $j = 3$. Nach der Quotientenregel erhält man $r = 2$, das Pivotelement ist also $t_{23} = 1/2$.
In diesem Fall führt man bei der Pivotisierung folgende Zeilenoperationen aus: Zuerst addiere man Zeile 2 zu Zeile 0, dann addiere man Zeile 2 zu Zeile 3, danach zieht man Zeile 2 von Zeile 1 ab und multipliziert daraufhin Zeile 2 mit 2.
Das Ergebnis ist im nächsten Tableau, das zur Basis $B'' = \{1, 3, 5\}$ gehört, dargestellt:

1	0	1	0	1	0	1
0	1	-1	0	1	0	1
0	0	2	1	-1	0	1
0	0	1	0	0	1	1

Die zugehörige Basislösung ist $x = (1, 0, 1, 0, 1)^t$ mit Zielfunktionswert -1. Da in diesem Tableau alle reduzierten Kosten t_{0j} größer oder gleich 0 sind, ist x nach folgendem Satz 1.4 optimal.

3.36 Satz *(Optimalitätskriterium für Basislösungen) Ist x eine zulässige Basislösung bezüglich einer Basis B von A und gilt*

$$c_{\bar{N}(j)} = c_{N(j)} - c_B^t A_B^{-1} A_{N(j)} \geq 0 \forall j = 1, ..., n - m$$

so ist x eine Optimallösung des linearen Programms $\min\{c^t x | Ax = b, x \geq 0\}$.

Beweis: Eine Basislösung $x = (A_B^{-1} b, 0)$ ist optimal, wenn $x_N = 0$ die Optimierungsaufgabe

$$\min\left\{c_B^t A_B^{-1} b + (c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N) x_N | x_N \geq 0\right\}$$

löst, d.h. wenn $x_N = 0$ optimal ist für

$$\min(c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N)x_N | x_N \geq 0$$

also wenn

$$(c_{N(j)} - c_B^t A_B^{-1} A_{N(j)}) \geq 0 \forall j \in \{1, ..., n-m\} .$$

Anmerkung: Sind die reduzierten Kosten aller Nichtbasisvariablen größer oder gleich Null, so ist die Optimalität der Lösung gewährleistet. Allerdings ist dieses Optimalitätskriterium nur hinreichend, nicht aber notwendig. Dementsprechend gilt der umgekehrte Fall nicht, d.h. es gibt lineare Programme in denen reduzierte Kosten echt kleiner als Null auftreten, aber die entsprechende Basislösung dennoch optimal ist. Man darf im allgemeinen für eine optimale Basislösung x also nicht folgern, dass $c_{\bar{N}(j)} \geq 0$.

q.e.d.

Nun muss noch die Korrektheit der Pivotisierung nachgewiesen werden.

3.37 Lemma *: Sei B Basis und $B' = B \backslash \{B(r)\} \cup \{j\}$ eine benachbarte Basis. Dann kann $T(B')$ durch Pivotisieren mit t_{rj} berechnet werden.*

Beweis: Wird weggelassen, da er nichts zur Spieltheorie beiträgt und eher in den Bereich der Numerik fällt.

3.3.2 Beschreibung des Algorithmus

Das Simplex-Verfahren beruht auf der im letzten Abschnitt entwickelten Idee des Basiswechsels, der im Simplextableau durchgeführt wird:
Immer wenn das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist, wird ein Basiswechsel durchgeführt und mittels einer Pivotoperation das zur nächsten Basis passende Simplextableau bestimmt. Eben dieses Verfahren lässt sich wie folgt formulieren:
Algorithmus 1: Simplex-Verfahren(Basisform)
Input: Basislösung (x_B, x_N) zu einer Basis B
Schritt 1: Berechne das Simplex-Tableau $T(B)$
Schritt 2: Falls $t_{0j} \geq 0 \forall j = 1, ..., n$
STOPP: Die zum Tableau gehörende Basislösung (x_B, x_N) mit $x_{B(i)} = t_{i(n+1)}$ $\forall i = 1, ..., m$ und $x_{N(j)} = 0 \forall j = 1, ..., n-m$ mit Zielfunktionswert $-t_{0(n+1)}$ ist optimal.
Schritt 3: Wähle j mit $t_{0j} < 0$.
Schritt 4: Wenn $t_{ij} \leq 0 \forall i = 1, ..., m$
STOPP: LP unbeschränkt.
Schritt 5: Bestimme $r \in \{1, ..., m\}$ mit $\frac{t_{r(n+1)}}{t_{rj}} = \min_{i=1,...,m} \left\{ \frac{t_{i(n+1)}}{t_{ij}} : t_{ij} > 0 \right\}$.
Schritt 6: Pivotisiere mit t_{rj}, d.h. multipliziere Zeile r mit $\frac{1}{t_{rj}}$ und addiere für alle Zeilen $i = 1, ..., m; i \neq r$ das $-\frac{t_{ij}}{t_{rj}}$-fache von Zeile r zu Zeile i.
Schritt 7: Gehe zu Schritt 2.

Die Korrektheit des Verfahrens folgt aus dem Hauptsatz der linearen Optimierung und der Verwendung des Pivotisierens zum Basiswechsel.
Bevor man das Verfahren allerdings anwenden darf, sind noch folgende Überlegungen notwendig:
1. Man muss untersuchen, ob das beschriebene Verfahren endlich ist.
2. Es ist zu klären, wie man die im Input geforderte zulässige Startlösung erzeugen kann. Falls dies nicht möglich ist, so gibt es ein anderes Verfahren, mit dem man das Problem lösen kann.

3.3.3 Degeneriertheit und Endlichkeit des Simplex-Verfahrens

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob das Simplex-Verfahren, so wie es im Algorithmus definiert ist, endlich ist, d.h. ob es irgendwann mit einer optimalen Basislösung oder dem Hinweis, dass das Problem unbeschränkt ist, abbricht. Bereits bekannt ist, dass es maximal $\binom{n}{m}$ Basislösungen geben kann. Wird jede höchstens einmal im Simplex-Verfahren „besucht“, so ist das Verfahren endlich. Das wäre gewährleistet, wenn wir zeigen könnten, dass sich der Zielfunktionswert in jedem Pivotschritt verbessert. Da aber leider dies nicht der Fall ist, muss das Simplex-Verfahren sogar etwas modifiziert werden, um seine Endlichkeit zu garantieren. Dazu benötigt man zunächst eine Definition:

3.38 Definition *: Eine Basislösung heißt degeneriert (oder entartet), falls mindestens eine ihrer Basisvariablen den Wert 0 hat.*

Im Fall, dass es keine degenerierten Basislösungen gibt, ist das Problem der Endlichkeit des Simplex-Verfahrens nach den Vorüberlegungen schnell geklärt.

3.39 Satz *: Sei (LP) ein lineares Programm, das nur nicht degenerierte Basislösungen besitzt. Dann endet das Simplex-Verfahren nach spätestens* $\binom{n}{m}$ *Pivotoperationen.*

Beweis: In jeder Pivotoperation wird der Zielfunktionswert um $x_{N(s)}\bar{c_{N(s)}}$ verbessert. Wir wollen zeigen, dass dieser Wert $x_{N(s)}\bar{c_{N(s)}} > 0$ ist. Nach der Quotientenregel gilt:

$$x_{N(s)} = \min\left\{ \frac{\tilde{b_i}}{a_{i\tilde{N(s)}}} : a_{i\tilde{N(s)}} > 0 \right\}$$

Entweder ist das lineare Programm unbeschränkt oder das Minimum existiert und

$$\frac{\tilde{b_i}}{a_{i\tilde{N(s)}}} > 0,$$

weil man weiß, dass $\tilde{b_i}$ als i-te Komponente von $A^{-1}b$ dem Wert der neuen Basisvariablen x_i entspricht und somit nach der Voraussetzung, dass B nicht entartet ist, echt größer Null ist. Weil sich der Zielfunktionswert in jedem Schritt echt verbessert, kann sich also keine Basislösung wiederholen und das Verfahren ist endlich.

q.e.d.

Bei entarteten linearen Programmen kann es passieren, dass das Simplex-Verfahren kreist. Um dies zu verhindern muss man die angewendete Pivotregel modifizieren. Bisher wurde als Pivotspalte eine beliebige Spalte mit negativen reduzierten Kosten gewählt, und auch bei der Auswahl der Pivotzeile nicht drauf geachtet, welches r wir wählen, falls das Minimum in der Quotientenregel nicht eindeutig war. In der Praxis führt allerdings bei der Auswahl der Pivotspalte eine Spalte mit betragsmäßig möglichst großen negativen Kosten zu den besten Ergebnissen. Da man ja das „Kreisen“ verhinden will, kann man folgende Pivotregel anwenden:
Bland's Pivotregel:
- Wähle Spalte j mit negativen Kosten durch:

$$j = \min\{j' : t_{0j'} < 0\}.$$

- Wähle in der Quotientenregel r so, dass

$$B(r) = \min\left\{B(i) : t_{ij} > 0 und \frac{t_{i(n+1)}}{t_{ij}} \leq \frac{t_{k(n+1)}}{t_{kj}} mit t_{kj} > 0\right\}$$

d.h. die erste Basisvariable, an der das Minimum angenommen wird, muss die Basis verlassen.
Den Beweis dafür, dass das Simplex-Verfahren mit dieser Pivotregel endlich ist, wird hier nicht angeführt.
Der Nachweis der Endlichkeit lässt nun auch die Schlussfolgerung zu, dass jedes endlich lösbare lineare Programm mindestens eine Basislösung besitzt, die das Optimalitätskriterium erfüllt.
Am Ende dieses Abschnitt sollte noch erwähnt werden, dass in der Praxis sehr häufig entartete Basen auftreten, aber ein Kreisen des Simplex-Verfahrens kaum beobachtet wird.

3.3.4 Finden einer zulässigen Startlösung-das 2-Phasen-Simplex-Verfahren

Im Simplex-Verfahren wird als Input eine zulässige Basislösung gefordert. In diesem Abschnitt spielt die Berechnung einer solchen eine zentrale Rolle. Im einfachsten Fall liegt unser lineares Programm in $\leq$-Form mit positiver rechter Seite b vor, also etwa

$$\min c^t x; s.d. Ax \leq b,$$

mit einer $m \times n$-Matrix A,$c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$, wobei wir voraussetzen, dass $B_i \geq 0$ für alle $i = 1, ..., m$. Nun bringt man das lineare Programm durch die Einführung von m Schlupfvariablen in Standardform und erhält

$$\min c^t x; s.d. Ax + Iy = b, y \geq 0$$

Eine Basis der Koeffizientenmatrix $\tilde{A} = (A|I)$ ist also durch die zu den Schlupfvariablen gehörenden Spalten $\tilde{A_B} = I$ gegeben. Die entsprechende Basislösung ergibt sich daher als

$$x_N = 0, X_B = \tilde{A}_B^{-1} b = Ib = b \geq 0.$$

Diese entspricht genau dem Ursprung im Originalproblem in $\leq$-Form und weist den Zielfunktionswert Null auf.
Dieser einfache Fall liefert uns die grundsätzliche Idee zum Erzeugen einer ersten zulässigen Basislösung. Diese wird zuerst anhand eines Beispiels verdeutlicht:

Beispiel 3: Betrachten wir das folgende System

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Um eine positive rechte Seite zu erhalten, multiplizieren wir zunächst alle Zeilen i mit $b_i < 0$ mit (-1). Man erhält:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Die beiden markierten Einträge können bereits als Schlupfvariablen interpretiert werden, da sie die einzigen positiven Einträge ihrer Spalten sind und positive Koeffizienten haben. Dies geht bei Zeile 3 nicht, da die Basis $B = \{3, 4, 5\}$ zu einer unzulässigen Basislösung $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = -1$ führt. Daher führt man dann für die dritte Zeile eine neue Variable $\hat{x_3}$ ein, mit:

$$x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - x_5 + \hat{x_3} = 1,$$

und man erhält das neue System

$$(\tilde{A}|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hier ist eine Basis bekannt, nämlich $\{3, 4, 6\}$. Allerdings wurde durch die Einführung der neuen Variable $\hat{x_3}$ das Originalproblem verändert. Daher wird im nächsten Schritt als Hilfsproblem das lineare Programm

$$\min \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i; s.d. : \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} = b; \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} \geq 0$$

gelöst, um die neuen Variablen wieder „loszuwerden". Dieses Hilfsproblem hat im Vergleich zum Originalproblem einen entscheidenden Vorteil: Es kann mit dem Simplex-Verfahren gelöst werden, da man aufgrund der Konstruktion bereits eine zulässige Basislösung kennt. Formal muss man zur Erzeugung einer zulässigen Basislösung wie folgt vorgehen:
1. Multipliziere alle Zeilen i für die $b_i < 0$ mit (-1). Sei $\min \{c^t x : AX = b, x \geq 0\}$ das resultierende lineare Programm mit $b \geq 0$.
2. Löse das Hilfsproblem $\min \{\sum_{i=1}^{n} x_i : Ax + I\hat{x} = b; x, \hat{x} \geq 0\}$.
Warum hilft die Lösung des Hilfsproblems weiter? Dies wird der folgende Satz zeigen. Wie schon in Schritt 2 nimmt man der Einfachheit halber an, dass man in jeder Zeile eine Hilfsvariable eingefügt hat. Wie das eben betrachtete Beispiel

zeigt, kann man je nach Gegebenheit des Originalproblems oft auch mit weniger Hilfsvariablen auskommen.

3.40 Satz *: Sei das (LP)* $\min\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$ *gegeben und sei* $\min\{\sum_{i=1}^n \hat{x}_i : Ax + I\hat{x} = b; x, \hat{x} \geq 0\}$ *das zugehörige Hilfsproblem. Dann gilt:*
(LP) ist zulässig $\Leftrightarrow \min\{\sum_{i=1}^n \hat{x}_i : Ax + I\hat{x} = b; x, \hat{x} \geq 0\} = 0$.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei (LP) zulässig. Dann existiert $\bar{x}$ mit $A\bar{x} = b, \bar{x} \geq 0$. Eine zulässige Lösung des Hilfsproblems erhält man in diesem Fall durch $x := \bar{x}, \hat{x} := 0$.

$\Leftarrow$ Sei nun $\min\{\sum_{i=1}^n \hat{x}_i : Ax + I\hat{x} = b; x, \hat{x} \geq 0\} = 0$.
Ist $\begin{pmatrix} x* \\ \hat{x}* \end{pmatrix}$ optimal, so gilt $\hat{x}* = 0$.
$\Rightarrow \exists x* \geq 0$ mit $Ax* = b$.
Also ist (LP) zulässig.

q.e.d.

Nun wissen wir, dass sich eine zulässige Lösung des linearen Programms (LP) durch Lösen des Hilfsproblems leicht finden lässt. Allerdings ist noch die Frage offen, wie man eine *Basislösung* findet. Hierbei unterscheidet man zwei Fälle:

Fall 1 Alle $\hat{x}*$-Variablen sind Nichtbasisvariablen. Dann sind die $x*$-Variablen Basisvariablen und wir können sie als zulässige Basislösung des Originalproblems verwenden.

Fall 2 Ist $\hat{x}_i^* = 0$ eine entartete Basisvariable (das heißt eine Basisvariable, die den Wert Null annimmt), so pivotisiert man sie aus der Basis heraus, bis man eine optimale Basislösung erhält, die keine künstlichen Variablen als Basisvariablen hat.

Dass man die künstlichen Variablen aus der Basis heraus pivotisieren kann, wird hier nicht gezeigt.
Die Minimierung des Hilfsproblems nennt man auch Phase 1 des Simplex-Verfahrens. Der in Algorithmus 1 beschriebene eigentliche Simplex-Algorithmus heißt Phase 2 des Simplex-Verfahrens.
Bei der Umsetzung von Phase 1 müssen folgende Hinweise unbedingt beachtet werden:
- Im Starttableau ist eine Basis B leicht ablesbar. Man darf aber nicht vergessen, die Kosten der Basisspalten in der obersten Zeile des Tableaus durch elementare Zeilenoperationen auf Null zu setzen, so dass das Tableau $T(B)$ der entsprechenden Basis B vorliegt.
- Vor Beginn der Phase 2 müssen die Kostenkoeffizienten der durch Phase 1 bestimmten neuen Basisvariablen durch elementare Zeilenoperationen auf Null gesetzt werden.

Algorithmus 2: 2-Phasen Simplex-Verfahren
Input: Lineares Programm der Form $\min\{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}$, wobei A eine

$m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$.
Schritt 1: Erzeuge das Gleichungssystem $Ax+I\hat{x} = b$, mit $m \times m$ Einheitsmatrix I und $b \geq 0$.
1. Multipliziere Spalten mit negativem b_i mit (-1)
2. Addiere die Variable $\hat{x_i}$ zu Zeile $i, i = 1, ..., m$

Schritt 2: Erzeuge das entsprechende Tableau $T(B)$ zur Basis B, wobei B die Spalten von I enthält. (Basislösung $\hat{x} = b, x = 0$)
Schritt 3: Löse $z = \min\{\sum_{i=1}^{m} \hat{x_i} : Ax + I\hat{x} = b; x, \hat{x} \geq 0\}$
Schritt 4: Wenn $z > 0$, *STOPP:* Das LP ist unzulässig.
Schritt 5: Wenn $z = 0$:
1. Pivotisiere alle künstlichen Variablen $\hat{x_i}$ aus der Basis.
2. Streiche die zu $\hat{x}$ gehörenden Spalten aus dem Tableau.
3. Ersetze die Zielfunktion durch $c^t x$.
4. Wende elementare Zeilenoperationen an, um die Koeffizienten der Basisvariablen
in der Zielfunktion zu Null zu machen.

Schritt 6: Wende Phase 2 des Simplexverfahrens (d.h. Algorithmus 1) an, um das so entstandene lineare Programm zu lösen.

Beispiel 4: Hier wird nun Beispiel 1.10 fortgesetzt, wo das Originalproblem durch das folgende Tableau gegeben ist:

-2	-1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	3
-2	2	0	2	0	2
-1	-1	0	0	1	-1

Nach der Einführung einer künstlichen Variablen in Zeile 3 erhalten wir das folgende Hilfsproblem:

0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	3
-1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	-1	1	1

Hier kennt man die zulässige Basis $B = \{3, 4, 6\}$ bereits. Nun muss die Kostenzeile an diese Basis angepasst werden. Um in der 6. Spalte eine Null als Koeffizient zu erreichen, subtrahieren wir die 3. Zeile von der Kostenzeile. Daraufhin erhält man das folgende Tableau:

-1	-1	0	0	1	0	-1
0	1	1	0	0	0	3
-1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	-1	1	1

Hier kann man die Basislösung $x_1 = x_2 = x_5 = 0, x_3 = 3, x_4 = 1, \hat{x_3} = 1$ mit Zielfunktionswert $\hat{x_3} = 1$ ablesen. Nun sucht man mit dem Simplex-Verfahren die Lösung des Hilfsproblems. Als Pivotelement wählen wir $t_{31} = 1$ und erhalten nach der entsprechenden Pivotoperation das folgende Tableau

0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	3
0	2	0	1	-1	1	2
1	1	0	0	-1	1	1

mit der Basis $B(1) = 3, B(2) = 4, B(3) = 1$. Der Zielfunktionswert lässt sich oben rechts als Null ablesen und ist damit optimal. Außerdem sind alle künstlichen Variablen (in unserem Fall also $\hat{x_3}$) Nichtbasisvariablen, so dass man ohne weitere Pivotoperationen zum Originalproblem zurückkehren kann. Dazu müssen wir nur die zu den künstlichen Variablen gehörenden Spalten weglassen und die Kostenzeile des Hilfsproblems durch die Kostenzeile des Originalproblems ersetzen.

-2	-1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	3
0	2	0	1	-1	2
1	1	0	0	-1	1

Im Originalproblem können wir nun als Startbasis die optimale Basis $B' = \{3, 4, 1\}$ des Hilfsproblems verwenden. Dazu muss aber zunächst wieder die Kostenzeile an die neue Basis B' angepasst werden.
Wir transformieren die -2 „oben links“ zu 0, indem wir das Doppelte der 3. Zeile zu der Kostenzeile addieren und erhalten das Tableau

0	1	0	0	-2	2
0	1	1	0	0	3
0	2	0	1	-1	2
1	1	0	0	-1	1

mit Basislösung $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 0$ und Zielfunktionswert $-2x_1 - x_2 = -2$. Weitere Pivotoperationen sind nicht notwendig, da Spalte 5 des Tableaus zeigt, dass das Problem unbeschränkt ist.
Das Ergebnis lautet also: Das Originalproblem ist unbeschränkt.

3.3.5 Das revidierte Simplex-Verfahren

Das revidierte Simplex-Verfahren ist bei linearen Problemen mit sehr vielen Variablen von großer praktischer Bedeutung. Zusätzlich ist es die Grundlage für viele Verfahren der ganzzahligen Optimierung, zum Beispiel für Spaltengenerierungsverfahren und Dekompositionsansätze.
Die Ausgangsüberlegung ist folgende: Bei großen Tableaus wird das Pivotisieren des ganzen Tableaus aufwändig und das Simplex-Verfahren damit ineffizient. Im Fall, dass $m << n$, kann man das Simplex-Verfahren entscheidend verbessern. Dazu betrachte man nochmal das Vorgehen zur Bestimmung des Pivotelements:
1. Entscheide, ob es eine Nichtbasisvariable mit negativen reduzierten Kosten gibt, also eine Spalte j mit $\bar{c_j} = c_j - c_B A_B^{-1} A_j < 0$.
2. Wenn es so eine Spalte j gibt, wähle sie als Pivotspalte und bestimme die Pivotzeile durch

$$\min \left\{ \frac{\tilde{b_i}}{\tilde{a_{ij}}} : \tilde{a_{ij}} > 0 \right\},$$

wobei $\tilde{b} = A_B^{-1}b, \tilde{A}_j = A_B^{-1}A_j$ ist.

Um die letztere der beiden Informationen zu erhalten, st also nicht das komplette Tableau nötig, sondern die Kenntnis von A_B^{-1} reicht aus. Dies liefert uns die Idee, die Pivotisierung immer nur in einem kleineren Tableau mit nur $m + 2$ Spalten durchzuführen, das aus den m Basisspalten besteht zuzüglich der neuen Spalte j. Man betrachte dazu folgendes Ausgangstableau, in dem eine zulässige Basis bereits bekannt ist,

1	c^t	0	0
0	A	I	b

und erinnern an die Definition 3.35 des Tableaus $T(B)$ zu einer beliebigen anderen Basis B:

1	$\bar{c^t} = c^t - c_B^t A_B^{-1} A$	$-c_B^t A_B^{-1}$	$-c_B^t A_B^{-1} b$
0	$\tilde{A} = A_B^{-1} A$	$A_B^{-1} I$	$\tilde{b} = A_B^{-1} b$

Im nun folgenden Verfahren werden $\tilde{A}$ und $\bar{c}$ in den Pivotoperationen nicht vollständig berechnet.

Algorithmus 3: revidiertes Simplex-Verfahren (Basisform)

Input: Lineares Programm mit Ausgangstableau

1	c^t	0	0
0	A	I	b

, $T_{red}(B) =$

0	0
I	b

,$B := \{n - m + 1, ..., n\}, \tilde{b} = b, \tilde{A} = A$

Schritt 1: Falls $\bar{c_j} = c_j - c_B^t A_B^{-1} A_j \geq 0$ für alle $j \in N$ *STOPP:* (x_B, x_N) mit $x_{B(i)} = \tilde{b_i} x_N = 0$ ist optimal.

Schritt 2: Sonst wähle $j \in N$ mit $\bar{c_j} < 0$. Erzeuge $\tilde{A_j} = A_B^{-1} A_j$ (A_j bezeichnet dabei die j-te Originalspalte) und füge die Spalte $\tilde{A_j}$ ganz rechts an das Tableau T_{red} an.

Schritt 3: Bestimme

$$\frac{\tilde{b_r}}{\tilde{a_{rj}}} = \min_{i=1,\dots,m} \left\{ \frac{\tilde{b_i}}{\tilde{a_{ij}}} : \tilde{a_{ij}} > 0 \right\}.$$

Existiert der Ausdruck nicht, *STOPP:* Das lineare Programm ist unbeschränkt. Sonst: Pivotisiere $(T_{red}|\tilde{A_j})$ mit Pivotelement $\tilde{a_{rj}}$. Setze $B(r) = j$. Erhalte neues A_B^{-1} aus Spalten $1, ..., m$ von T_{red} und gehe zu Schritt 1.

Das revidierte Simplex-Verfahren eignet sich besonders gut, wenn jede Spalte eine mögliche Lösung eines Problems repräsentiert, und man diese Lösungen nicht mitführen muss, sondern erzeugen kann. Das Teilproblem, eine Spalte mit möglichst kleinen reduzierten Kosten zu finden, oder zu bestätigen, dass es keine negativen reduzierten Kosten gibt, wird dabei als Pricing-Problem bezeichnet. Daher wird die Effizienz des revidierten Simplex-Verfahrens maßgeblich davon beeinflusst, wie effizient man das Pricing Problem lösen kann. Deswegen wird dieses Verfahren in der Praxis oft bei der Lösung großer ganzzahliger Programme eingesetzt. Beispiel dafür wäre das Bearbeiten von Personaleinsatzproblemen (Crew Scheduling).

Kapitel 4

Beispiel

4.1 Koalitionsspiel

Folgendes Beispiel veranschaulicht die Vorgehensweise des Operations Research anhand einer „Koalitionsbildungssituation“

4.1.1 Ausgangssituation in der Realität

Wir betrachten folgende Automobilhersteller: Audi, BMW, Mercedes, Opel und VW. Nachfolgende Tabelle zeigt die Verteilung des PKW-Bestandes und die Verteilung der Altfahrzeuge in Deutschland am 1. Janar 2008[1]:

Hersteller	Marktanteil	Anzahl PKW	Altfahrzeuge	Anteil Alt-KfZ ohne Sonstige (q_i)
Audi	6,1 %	3,355 Mio.	384 300	10,74 %
BMW	6,5 %	3,575 Mio.	409 500	11,44 %
Mercedes	9,1 %	5,005 Mio.	573 300	16,02 %
Opel	13,8 %	7,59 Mio.	869 400	24,30 %
VW	21,3 %	11,715 Mio.	1 341 900	37,5 %
Summe 1	**56,8 %**	**31,24 Mio.**	**3 578 400**	**100 %**
Sonstige	43,2 %	23,76 Mio.	2 721 600	-
Summe 2	100 %	55,0 Mio.	6 300 000	-

Da wir ausschließlich die deutsche Automobilindustrie betrachten, wurden alle nicht deutschen Hersteller unter dem Punkt „Sonstige“ zusammengefasst. In diesem Beispiel möchten wir herausfinden, welche Alternativen bei der Altfahrzeugverschrottung vorgezogen werden.

Um die Altfahrzeuge verschrotten zu können, müssen die Automobilhersteller eine Fahrzeugrecyclinganlage bauen. Dabei haben sie die Möglichkeit zusammen oder in einzelnen Partnerschaften eine bzw. mehrere große Entsorgungsstation zu bauen. Das Management der einzelnen Firmen möchte eine Handlungsempfehlung bzgl. der besten Alternative erhalten. Das Management weiß, dass es verschiedene Größen der Anlagen gibt und ist über die jeweiligen Bau- und Unterhaltskosten informiert. Zudem liegen die Transportkosten $c_{Transport} = 0,065€$ pro Kilometer und Auto. Nachfolgende Tabelle liefert auch uns Informationen

[1] Quelle: Kraftfahrt Bundesamt

über verschiedene Verschrottungsanlagen, deren Kapazität, den Unterhaltskosten und der Nutzungsdauer:

Anlage	Kapazität	Baukosten	Unterhalt	Nutzungsdauer
Anlage A	600 000	25 Mio. €	0,7 Mio. €	10
Anlage B	900 000	30 Mio. €	1,2 Mio. €	10
Anlage C	1 900 000	45 Mio. €	2,0 Mio. €	10
Anlage D	3 700 000	50 Mio. €	2,8 Mio. €	10

Wir betrachten die Situation aus Sicht des Managements der BMW AG. Um uns die Situation auch geographisch vor Augen zu führen, zeigt Abbildung 4.1 eine Karte mit den Verbindungen zu den jeweiligen Hauptstandorten der Hersteller.[2]

Abbildung 4.1: Hauptstandorte der fünf großen deutschen Automobilhersteller

4.1.2 Identifizierung der Problemstellung

Die Operations - Research - Abteilung von BWM hat nun zunächst die Aufgabe aus diese Rahmenbedingungen in eine explizite Problemstellung zu definieren.

[2]Quelle: Googlemaps

Problem: Auffindung der optimalen Handlungsstrategie unter Berücksichtigung einer möglichen Koalitionsbildung mit anderen Herstellern, bei der Altfahrzeugentsorgung.

Nachdem nun das Problem definiert wurde, muss die Abteilung feststellen, ob die jeweilige Alternative optimal ist:
Die gegebene Situation behandelt die Entsorgung von Altfahrzeugen, die mit Entsorgungskosten verbunden ist. Deshalb ist die Alternative, welche die geringsten Kosten verursacht, die optimale Handlungsstrategie.
Dieses Problem lässt sich somit als Opitmierungsproblem bestimmen, das mit spieltheoretischen Hilfsmitteln zu lösen ist. Man prüft mögliche Koalitionen auf Optimalität und überprüft ob eine Koalition auch aus Sicht der möglichen Partner sinnvoll ist.
Im nächsten Schritt wird das definierte Problem mathematisch erfasst.

4.1.3 Mathematische Darstellung des Problems

Wir möchten die Nutzenfunktion (die in diesem Beispiel die entstandenen Kosten repräsentiert) minimieren. Deshalb sind wir auf der Suche nach:

$$\min \rightarrow u_{BMW}$$

Der wichtigste Schritt folgt nun: Das Aufstellen der Nutzenfunktion aus den gegebenen Informationen

$$u_i = c_{Bau} \cdot p_i + c_{Unterhalt} \cdot p_i \cdot t + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Entfernung} \cdot t$$
$$\text{mit } i \in M = \{\text{Audi, BMW, Mercedes, Opel, VW}\}$$

Dabei ist x_{Auto} die Anzahl der zu transportierenden Fahrzeuge und $x_{Entfernung}$ die Anzahl der Transportkilometer. p_i ist ein Faktor der den Marktanteil wiederspiegelt. Er sei wie folgt definiert:

$$p_{i_B} = \frac{q_i}{\min q_b} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\min q_b}}$$
$$\text{mit } b \in B = \{\text{Koalitionsteilnehmer}\} \quad \text{und } k \in B$$

Bei Betrachtung der Nutzenfunktion wird man feststellen, dass wir diese über die gesamte Nutzungsdauer der Anlage aufgestellt haben und die Entfernung die einzige Variable ist. Demnach muss man einen maximalen „Radius“ um den Hauptstandort bestimmen, in dem sich die gemeinsame Anlage befinden muss, damit eine Kooperation sinnvoll ist.
Damit haben wir nun alle nötigen Informationen um die an uns gestellte Aufgabe zu lösen, um somit dem Management der BMW AG eine Empfehlung aussprechen zu können.

4.1.4 Lösung des Problems

Zuerst bestimmen wir die jeweiligen Nutzen ohne Koalition. Diese dienen im weitern Verlauf zum Vergleich mit dem jeweiligen Koalitionsnutzen.

Einzelnutzen der Unternehmer

Für die fünf großen deutschen Automobilhersteller ergeben sich folgende Nutzen (bzw. Kosten):

Audi: Wie man aus den obigen Tabellen entnehmen kann, muss Audi pro Jahr 384 300 Autos verschrotten. Demnach muss Audi die Anlage A bauen. Somit ergeben sich folgende Kosten:

$$\begin{aligned} u_{Audi} &= 25 \text{ Mio. €} + 0,7 \text{ Mio. €} \cdot 10 + 0,065\text{€} \cdot 384300 \cdot 0 \cdot 10 \\ &= 25 \text{ Mio. €} + 7 \text{ Mio. €} + 0 = 32 \text{ Mio. €} \end{aligned}$$

BMW: Wie man aus den obigen Tabellen entnehmen kann, muss BMW pro Jahr 384 300 Autos verschrotten. Demnach muss BMW die Anlage A bauen. Somit ergeben sich folgende Kosten:

$$\begin{aligned} u_{BMW} &= 25 \text{ Mio. €} + 0,7 \text{ Mio. €} \cdot 10 + 0,065\text{€} \cdot 409500 \cdot 0 \cdot 10 \\ &= 25 \text{ Mio. €} + 7 \text{ Mio. €} + 0 = 32 \text{ Mio. €} \end{aligned}$$

Mercedes: Wie man aus den obigen Tabellen entnehmen kann, muss Mercedes pro Jahr 384 300 Autos verschrotten. Demnach muss Mercedes die Anlage A bauen. Somit ergeben sich folgende Kosten:

$$\begin{aligned} u_{Mercedes} &= 25 \text{ Mio. €} + 0,7 \text{ Mio. €} \cdot 10 + 0,065\text{€} \cdot 573300 \cdot 0 \cdot 10 \\ &= 25 \text{ Mio. €} + 7 \text{ Mio. €} + 0 = 32 \text{ Mio. €} \end{aligned}$$

Opel: Wie man aus den obigen Tabellen entnehmen kann, muss Opel pro Jahr 384 300 Autos verschrotten. Demnach muss Opel die Anlage A bauen. Somit ergeben sich folgende Kosten:

$$\begin{aligned} u_{Opel} &= 30 \text{ Mio. €} + 1,2 \text{ Mio. €} \cdot 10 + 0,065\text{€} \cdot 869400 \cdot 0 \cdot 10 \\ &= 30 \text{ Mio. €} + 12 \text{ Mio. €} + 0 = 42 \text{ Mio. €} \end{aligned}$$

VW: Wie man aus den obigen Tabellen entnehmen kann, muss VW pro Jahr 384 300 Autos verschrotten. Demnach muss VW die Anlage A bauen. Somit ergeben sich folgende Kosten:

$$\begin{aligned} u_{VW} &= 45 \text{ Mio. €} + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 + 0,8\text{€} \cdot 1341900 \cdot 0 \cdot 10 \\ &= 45 \text{ Mio. €} + 20 \text{ Mio. €} + 0 = 65 \text{ Mio. €} \end{aligned}$$

Aufstellung aller möglichen Koalition

Im Folgenden werden wir alle möglichen Koalitionen bilden und für jede Koalition bestimmen, welche Anzahl an Fahrzeugen diese verschrotten lassen muss. Um uns im weiteren Verlauf das Rechnen zu erleichtern tragen wir in dieser Tabelle auch die jeweiligen Werte für p_i ein. Dieser bestimmt sich wie oben definiert.

Koalition $K = \{B\}$	Alt-KfZ	p_{Audi_B}	p_{BMW_B}	$p_{Mercedes_B}$	p_{Opel_B}	p_{VW_B}
A	384 300	1	-	-	-	-
B	409 500	-	1	-	-	-
M	573 300	-	-	1	-	-
O	869 400	-	-	-	1	-
V	1 341 900	-	-	-	-	1
AB	793 800	0,484	0,516	-	-	-
AM	957 600	0,4014	-	0,5986	-	-
AO	1 253 700	0,3065	-	-	0,6935	-
AV	1 726 200	0,2226	-	-	-	0,7774
BM	982 800	-	0,4166	0,5834	-	-
BO	1 278 900	-	0,3201	-	0,6799	-
BV	1 751 400	-	0,2338	-	-	0,7662
MO	1 442 700	-	-	0,3974	0,6029	-
MV	1 915 200	-	-	0,2993	-	0,7007
OV	2 211 300	-	-	-	0,3932	0,6068
ABM	1 367 100	0,2812	0,2995	0,4193	-	-
ABO	1 663 200	0,2311	0,2461	-	0,5228	-
ABV	2 135 700	0,1700	0,1917	-	-	0,6383
AMO	1 827 000	0,2103	-	0,3137	0,4760	-
AMV	2 299 500	0,1671	-	0,2493	-	0,5836
AOV	2 595 600	0,1481	-	-	0,3950	0,5169
BMO	1 852 200	-	0,2210	0,3095	0,4695	-
BMV	2 324 700	-	0,1761	0,2466	-	0,5773
BOV	2 620 800	-	0,1561	-	0,3318	0,5121
MOV	2 784 600	-	-	0,2059	0,3122	0,4819
ABMO	2 236 500	0,1718	0,1830	0,2563	0,3889	-
AMOV	3 168 900	0,1213	-	0,1808	0,2744	0,4235
ABVO	3 005 100	0,1279	0,1362	-	0,2894	0,4465
ABMV	2 709 000	0,1419	0,1511	0,2116	-	0,4954
BMOV	3 194 100	-	0,1282	0,1795	0,2722	0,4201
ABMOV	3 578 400	0,1074	0,1144	0,1602	0,2430	0,375

Bestimmung der einzelnen Koalitionsnutzen

Um Festzustellen ob eine Koalition sinnvoll ist, muss man sich über die jeweiligen Entfernung der Hersteller zu einander informieren. Nachfolgende Matrix gibt diese Entfernungen vor:

	Audi	BMW	Mercedes	Opel	VW
Audi	0 km	80 km	228 km	336 km	526 km
BMW	80 km	0 km	232 km	411 km	600 km
Mercedes	228 km	232 km	0 km	195 km	545 km
Opel	336 km	411 km	195 km	0 km	391 km
VW	526 km	600 km	545 km	391 km	0 km

Damit sind alle Informationen, die zur genauen Nutzenbestimmung der einzelnen Koalition notwendig sind, bestimmt worden. Im nächsten Schritt werden die unterschiedlichen Koalitionen bewertet. Wir werden dies in Form von Fallunterscheidungen machen, indem wir für jeder Koalition, die für BMW in Frage kommt einen neuen Fall definieren.

Fall 1: $B = \{BMW, Audi\}$
Der Altfahrzeugbestand dieser Koalition beläuft sich auf 793 800 Fahrzeuge. Demnach müssen die beiden Partner die Anlage B bauen lassen, was Baukosten in Höhe von €30 Mio. und laufende Kosten von €1,2 Mio. pro Jahr bedeuten würde. Daraus ergeben sich folgende Nutzen für BMW und Audi:

$$\begin{aligned} u_{1_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 30 \text{ Mio. } € \cdot 0,516 + 1,2 \text{ Mio. } € \cdot 100,516 + 0,065 \text{ } € \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 15,48 \text{ Mio. } € + 6,192 \text{ Mio. } € + 0,266175 \frac{\text{Mio. } €}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \\ &= 21,675 \text{Mio. } € + 0,266175 \frac{\text{Mio. } €}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

Aus dem Quotienten aus dem Nutzen, der ohne Koalition erzielt wird und dem eben bestimmten Nutzen, erhält man einen Radius, innerhalb dem es sich für BMW lohnt, eine Kooperation einzugehen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 21,675 \text{Mio. } € + 0,266175 \frac{\text{Mio. } €}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. } € \\ 0,266175 \frac{\text{Mio. } €}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 10,325 \text{ Mio. } € \\ x_{Ent} &< 38,79 \text{ km} \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Nutzenfunktion für Audi und ermitteln analog den Radius. Anschließend werfen wir einen Blick auf die Entferungsmatrix und stellen somit fest ob eine Koalition eintritt und in welchem Entfernungsintervall eine mögliche gemeinsame Anlage gebaut werden soll.

$$\begin{aligned} u_{1_{Audi}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Audi} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Audi} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 30 \text{ Mio. } € \cdot 0,484 + 1,2 \text{ Mio. } € \cdot 10 \cdot 0,484 + 0,065 \text{ } € \cdot 384300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 20,328 \text{Mio. } € + 0,249795 \frac{\text{Mio. } €}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 20,328 \text{Mio. } € + 0,249795 \frac{\text{Mio. } €}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. } € \\ 0,249795 \frac{\text{Mio. } €}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 11,672 \text{ Mio. } € \\ x_{Ent} &< 46,72 \text{ km} \end{aligned}$$

Die Entfernung zwischen München (BMW) und Ingolstadt (Audi) beträgt 80 km. Der Radius, in dem ein gemeinsamer Bau für BMW nutzenstiftend wäre beträgt 38,79 km um München und für Audi 46,72 km. Folglich gibt es eine Schnittmenge im Intervall $[33,28 \text{ km}; 38,79 \text{ km}]$ ab München um eine gemeinsame Anlage zu bauen.
$\Rightarrow$ **Koaliton kann dem Management empfohlen werden**

Fall 2: $B = \{BMW, Mercedes\}$

Wir verfahren analog wie in Fall 1:

$$\begin{aligned}
u_{2_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,4166 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,4166 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 18,747 \text{ Mio. €} + 8,332 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \\
&= 27,079 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 27,079\text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 4,921 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 18,49 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Mercedes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{2_{Mercedes}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Mercedes} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Mercedes} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,5834 + 1,2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,5834 + 0,065 \text{ €} \cdot 573300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 26,253 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 26,253 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 5,747 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 15,42 \text{ km}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 3: $B = \{BMW, Opel\}$

$$\begin{aligned}
u_{3_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,3201 + 1,2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,3201 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 14,4045 \text{ Mio. €} + 3,8412 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \\
&= 18,2457 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 18,2457\text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 13,7543 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 51,67 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Opel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{3_{Opel}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Opel} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Opel} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,6799 + 1,2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,6799 + 0,065 \text{ €} \cdot 869400 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 38,7543 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 38,7543 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 42 \text{ Mio. €}$$
$$0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 3,2457 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 5,7434 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 4: $B = \{BMW, VW\}$

$$\begin{aligned} u_{4_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,2338 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2338 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 15,197 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 15,197\text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 32 \text{ Mio. €}$$
$$0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 16,803 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 63,12 \text{ km}$$

Für VW ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{4_{VW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{VW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{VW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,7662 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,7662 + 0,065 \text{ €} \cdot 1341900 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 49,803 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 49,803 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 65 \text{ Mio. €}$$
$$0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 15,197 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 17,42 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 5: $B = \{BMW, Audi, Mercedes\}$

$$\begin{aligned} u_{5_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,2995 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2995 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 19,4675 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 19,4675\text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 32 \text{ Mio. €}$$
$$0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 12,5325 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 47,08 \text{ km}$$

Für Audi ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{5_{Audi}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Audi} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Audi} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,2812 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2812 + 0,065 \text{ €} \cdot 384300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 18,278 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 18,278 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 13,722 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 54,93 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Mercedes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{5_{Mercedes}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Mercedes} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Mercedes} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,4193 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,4193 + 0,065 \text{ €} \cdot 573300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 27,2545 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 27,2545 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 4,7455 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 12,73 \text{ km}
\end{aligned}$$

⇒ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 6: $B = \{BMW, Audi, Opel\}$

$$\begin{aligned}
u_{6_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,2461 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2461 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 15,9965 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 15,9965 \text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 16,0035 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 60,12 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Audi ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{6_{Audi}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Audi} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Audi} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,2311 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2311 + 0,065 \text{ €} \cdot 384300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 15,0215 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 15,0215 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 16,9785 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 67,96 \text{ km}\end{aligned}$$

Für Opel ergibt sich:

$$\begin{aligned}u_{6_{Opel}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Opel} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Opel} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,5228 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,5228 + 0,065 \text{ €} \cdot 869400 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 33,982 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 27,2545 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 4,7455 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 8,40 \text{ km}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 7: $B = \{BMW, Audi, VW\}$

$$\begin{aligned}u_{7_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1917 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1917 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 14,9526 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 14,9526 \text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 17,0474 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 64,05 \text{ km}\end{aligned}$$

Für Audi ergibt sich:

$$\begin{aligned}u_{7_{Audi}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Audi} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Audi} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,17 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,17 + 0,065 \text{ €} \cdot 384300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 13,26 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 13,26 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 18,74 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 75,02 \text{ km}\end{aligned}$$

Für VW ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{7_{VW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{VW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{VW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,6383 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,6383 + 0,065 \text{ €} \cdot 1341900 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 49,7874 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 49,7874 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 65 \text{ Mio. €} \\ 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 15,2126 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 17,44 \text{ km} \end{aligned}$$

⇒ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 8: $B = \{BMW, Mercedes, Opel\}$

$$\begin{aligned} u_{8_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,2210 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2210 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 14,365 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 14,365 \text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 17,635 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 66,25 \text{ km} \end{aligned}$$

Für Mercedes ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{8_{Mercedes}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Mercedes} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Mercedes} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,3095 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,3095 + 0,065 \text{ €} \cdot 573300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 20,1175 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 20,1175 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 11,8825 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 31,89 \text{ km} \end{aligned}$$

Für Opel ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{8_{Opel}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Opel} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Opel} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 45 \text{ Mio. €} \cdot 0,4695 + 2 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,4695 + 0,065 \text{ €} \cdot 869400 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 30,5175 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 30,5175 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 42 \text{ Mio. €} \\
0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 11,4825 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 20,32 \text{ km}
\end{aligned}$$

⇒ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 9: $B = \{BMW, Mercedes, VW\}$

$$\begin{aligned}
u_{9_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1761 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1761 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 13,7358 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 13,7358\text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 18,2642 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 68,62 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Mercedes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{9_{Mercedes}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Mercedes} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Mercedes} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,2466 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2466 + 0,065 \text{ €} \cdot 573300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 19,2348 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 19,2348 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 12,7652 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 39,56 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für VW ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{9_{VW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{VW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{VW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,5773 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,5773 + 0,065 \text{ €} \cdot 1341900 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 45,0294 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 45,0294 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 65 \text{ Mio. €} \\
0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 19,9706 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 22,90 \text{ km}
\end{aligned}$$

⇒ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 10: $B = \{BMW, Opel, VW\}$

$$\begin{aligned}
u_{10_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1561 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1561 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 12,0498 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 12,0498\text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 19,9502 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 74,95 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Opel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{10_{Opel}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Opel} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Opel} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,3318 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,3318 + 0,065 \text{ €} \cdot 869400 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 25,8804 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 25,8804 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 42 \text{ Mio. €} \\
0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 16,1196 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 28,52 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für VW ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{10_{VW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{VW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{VW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,5121 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,5121 + 0,065 \text{ €} \cdot 1341900 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 39,9438 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 39,9438 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 65 \text{ Mio. €} \\
0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 25,0562 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 28,73 \text{ km}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 11: $B = \{BMW, Audi, Mercedes, Opel\}$

$$\begin{aligned}
u_{11_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1830 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1830 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 14,274 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 14,274\text{Mio. €} + 0,266175\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 32 \text{ Mio. €}$$
$$0,266175\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 17,726 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 66,59 \text{ km}$$

Für Audi ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{11_{Audi}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Audi} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Audi} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1718 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1718 + 0,065 \text{ €} \cdot 384300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 13,4004 \text{ Mio. €} + 0,249795\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 13,4004 \text{ Mio. €} + 0,249795\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 32 \text{ Mio. €}$$
$$0,249795\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 18,5996 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 74,45 \text{ km}$$

Für Mercedes ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{11_{Mercedes}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Mercedes} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Mercedes} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,2563 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2563 + 0,065 \text{ €} \cdot 573300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 19,9914 \text{ Mio. €} + 0,372645\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 19,9914 \text{ Mio. €} + 0,372645\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 32 \text{ Mio. €}$$
$$0,372645\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 12,0086 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 32,23 \text{ km}$$

Für Opel ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{11_{Opel}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Opel} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Opel} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,3889 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,3889 + 0,065 \text{ €} \cdot 869400 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 30,3342 \text{ Mio. €} + 0,565110\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 30,3342 \text{ Mio. €} + 0,565110\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 42 \text{ Mio. €}$$
$$0,565110\frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 11,6658 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 20,64 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 12: $B = \{BMW, Audi, Opel, VW\}$

$$\begin{aligned} u_{12_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1362 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1362 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 10,6236 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 10,6236\text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 21,3764 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 80,31 \text{ km} \end{aligned}$$

Für Audi ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{12_{Audi}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Audi} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Audi} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1279 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1279 + 0,065 \text{ €} \cdot 384300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 9,9762 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 9,9762 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 22,0238 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 88,16 \text{ km} \end{aligned}$$

Für Opel ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{12_{Opel}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Opel} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Opel} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,2894 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2894 + 0,065 \text{ €} \cdot 869400 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 22,5732 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 22,5732 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 42 \text{ Mio. €} \\ 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 19,4268 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 34,38 \text{ km} \end{aligned}$$

Für VW ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{12_{VW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{VW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{VW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,4465 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,4465 + 0,065 \text{ €} \cdot 1341900 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 34,827 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 34,827 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 65 \text{ Mio. €} \\ 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 30,173 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 34,59 \text{ km} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 13: $B = \{BMW, Audi, Mercedes, VW\}$

$$\begin{aligned} u_{13_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1511 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1511 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 11,7858 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 11,7858 \text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 20,2142 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 75,94 \text{ km} \end{aligned}$$

Für Audi ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{13_{Audi}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Audi} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Audi} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1419 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1419 + 0,065 \text{ €} \cdot 384300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 11,0682 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 11,0682 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 20,9318 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 83,80 \text{ km} \end{aligned}$$

Für Mercedes ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{13_{Mercedes}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Mercedes} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Mercedes} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,2116 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2116 + 0,065 \text{ €} \cdot 573300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 16,5048 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 16,5048 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\ 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 15,4952 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 41,58 \text{ km} \end{aligned}$$

Für VW ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{13_{VW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{VW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{VW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,4954 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,4954 + 0,065 \text{ €} \cdot 1341900 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 38,6412 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 38,6412 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 65 \text{ Mio. €} \\ 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 26,3588 \text{ Mio. €} \\ x_{Ent} &< 30,22 \text{ km} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 14: $B = \{BMW, Mercedes, Opel, VW\}$

$$\begin{aligned}
u_{14_{BMW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1282 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1282 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 9,9996 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 9,9996 \text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 22,0004 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 82,667 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Mercedes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{14_{Mercedes}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Mercedes} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Mercedes} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1795 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1795 + 0,065 \text{ €} \cdot 573300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 14,001 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 14,001 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 17,999 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 48,30 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Opel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{14_{Opel}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Opel} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Opel} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,2722 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2722 + 0,065 \text{ €} \cdot 869400 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 21,2316 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 21,2316 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 42 \text{ Mio. €} \\
0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 20,7684 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 36,75 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für VW ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_{14_{VW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{VW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{VW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,4201 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,4201 + 0,065 \text{ €} \cdot 1341900 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 32,7678 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 32,7678 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 65 \text{ Mio. €} \\
0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32,2322 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 36,95 \text{ km}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

Fall 15: $B = \{BMW, Audi, Mercedes, Opel, VW\}$

$$\begin{aligned}
u15_{BMW}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{BMW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{BMW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1144 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1144 + 0,065 \text{ €} \cdot 409500 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 8,9232 \text{ Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 8,9232\text{Mio. €} + 0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,266175 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 23,0768 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 86,70 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Audi ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u15_{Audi}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Audi} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Audi} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1074 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1074 + 0,065 \text{ €} \cdot 384300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 8,3772 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 8,3772 \text{ Mio. €} + 0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,249795 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 23,6228 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 94,56 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Mercedes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u15_{Mercedes}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Mercedes} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Mercedes} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,1602 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,1602 + 0,065 \text{ €} \cdot 573300 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 12,4956 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 12,4956 \text{ Mio. €} + 0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 32 \text{ Mio. €} \\
0,372645 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} &< 19,5044 \text{ Mio. €} \\
x_{Ent} &< 52,34 \text{ km}
\end{aligned}$$

Für Opel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u15_{Opel}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{Opel} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{Opel} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,2430 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,2430 + 0,065 \text{ €} \cdot 869400 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\
&= 18,954 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 18,954 \text{ Mio. €} + 0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 42 \text{ Mio. €}$$
$$0,565110 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 23,046 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 40,78 \text{ km}$$

Für VW ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_{15_{VW}}(x_{Ent}) &= c_{Bau} \cdot p_{VW} + c_{Unterhalt} \cdot 10 \cdot p_{VW} + c_{Transport} \cdot x_{Auto} \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 50 \text{ Mio. €} \cdot 0,375 + 2,8 \text{ Mio. €} \cdot 10 \cdot 0,375 + 0,065 \text{ €} \cdot 1341900 \cdot x_{Ent} \cdot 10 \\ &= 29,25 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 29,25 \text{ Mio. €} + 0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 65 \text{ Mio. €}$$
$$0,872235 \frac{\text{Mio. €}}{\text{km}} \cdot x_{Ent} < 35,75 \text{ Mio. €}$$
$$x_{Ent} < 40,99 \text{ km}$$

⇒ **Die Koaliton kann dem Management *nicht* empfohlen werden**

4.1.5 Fazit

Aufgrund der Rechenergebnisse lässt sich erkennen, dass es nur eine Koalition gibt, bei der der Nutzen besser ist, als beim Bau einer eigenen Fabrik. Somit kann die Operations-Research-Abteilung der Firma BMW seinem Management folgende Empfehlung geben:

> „Setzten Sie sich mit dem Management der Audi AG zusammen und diskutieren Sie mit diesem über ein mögliche Koalition zwischen dem Haus BMW und Audi im Bezug auf eine gemeinsame Altfahrzeugentsorgungsanlage. Nach unseren Berechnung, müsste diese Anlage in einer Entfernung von mindestens 33,28 km und höchstens 38,79 km zu unserem Firmensitz liegen. Falls Sie sich auf einen Standort in diesem Intervall einigen, können Sie sich sicher sein, dass beide Koalitionpartner in Zukunft Kosten sparen.“

Damit wurde anhand eines ausführlich vorgerechnetem Beispiel der Ablauf einer Operations-Research-Untersuchung aufgezeigt.
Die Vorteile der Anwendung von kooperativer Spieltheorie wird in diesem Beispiel ebenfalls deutlich. Allen Beteiligten liegt nach Durchfürhung der hier betriebenen Rechnung die gleiche Information vor. Man kann sich somit auf seinen Partner sehr gut einstellen. Mit Hilfe weiterer spieltheoretischer Anwendungen, könnte man hier auch zeigen, wie verlässlich ein Partner handeln wird und wie groß der Schaden ist, den sein Fehlverhalten verursacht.
In diesem positiven Argument für die Verwendung der Spieltheorie kann man allerdings ebenso negative herauslesen. Die total Transparenz der Handlungen ist grade in Unternehmen nicht zwischen erwünscht. Von daher bewegt sich die Spieltheorie hier auf „Messersschneide“. Diese negative Argumentation ist auch dafür verantwortlich, dass in der Wirtschaft keine bzw. nur sehr geringe Information über die Anwendung von spieltheoretischen Ansätzen vorhanden ist.

Literaturverzeichnis

[1] Bernd Luderer: *Die Kunst des Modellierens*, Vieweg + Teubner 2008

[2] Hans-Jürgen Zimmermann: *Operations Research*, 2. Auflage, Vieweg 2008

[3] C. West Churchman, Russel Ackoff, Leonard Arnoff: *Operations Research*, 4. Auflage R.Oldenbourg Verlag 1968

[4] Walter Schlee: *Einführung in die Spieltheorie*, Vieweg 2004

[5] Thomas Riechmann: *Spieltheorie*, 2.Auflage, Vahlen 2008

[6] Werner Güth: *Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele*, 2. Auflage, Springer 1999

[7] Wolfgang Domschke, Andreas Dexl: *Einführung in Operations Research*, Springer 2007

[8] Wolfgang Domschke, Andreas Drexl, Robert Klein, und Armin Scholl : *Übungen und Fallbeispiele zum Operations Research*, Springer 2007

[9] Karl Heinz Borgwardt: *Optimierung, Operations Research, Spieltheorie: Mathematische Grundlagen*, Birkhäuser-Verlag 2001

[10] Günter Beuermann, Theodor Ellinger, und Rainer Leisten : *Operations Research: Eine Einführung* , Springer 2007

[11] Siegfried K. Berninghaus, Karl-Martin Ehrhart, und Werner Güth : *Strategische Spiele: Eine Einführung in die Spieltheorie*, Springer 2005

[12] Tomas Gal: *Grundlagen des Operationsresearch 1*, Springer 1987

[13] Tomas Gal: *Grundlagen des Operationsresearch 2*, Springer 1987

[14] Tomas Gal: *Grundlagen des Operationsresearch 3*, Springer 1987

[15] Antje Orths : *Multikriterielle, optimale Planung von Verteilungsnetzen im liberalisierten Energiemarkt unter Verwendung von spieltheoretischen Verfahren*, 2003

[16] Tomas Sauer: *Einführung in die Optimierung für Hörer aller Fachbereiche*, Justus-Liebig-Universität Gießen SS 2003

[17] Bernhard Schmitt: *Lineare Optimierung*, (Universität unbekannt) WS 2005/2006

[18] Prof. Dr. Andreas Kirsch : *Optimierungstheorie*, Universität Karlsruhe SS 2005

[19] Anita Schöbel: *Einführung in die Optimierung*, Göttingen SS 2005

[20] Prof. Jürgen Sauer: *Operations Research*, (Universität unbekannt) SS 2005

[21] Prof. Dr. Peter Beisel: *Optimierungsmethoden*, (Universität unbekannt) SS 2002

[22] Dr. Ulrich Kathöfer : *Operations Research*, Universität Münster WS 2007/2008

[23] Prof. Dr. Friedmar Schulz: *Mathematische Methoden in der Ökonomie*, Universität Ulm SS 2007

[24] Prof. Dr. Martin Grötschel: *Lineare Optimierung*, TU Berlin WS 2003/2004