Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichts bei Spielen in strategischer Form

M. Noll

6. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Robustheit bei fehlerhafter Strategiewahl

1.1 Trembling-Hand-Perfektheit

Unter der Annahme, dass Spieler bei ihrer Strategiewahl Fehler begehen können, benötigt man ein Kriterium um unplausible Gleichgewichte auszuschließen. Ermittelte Gleichgewichte sollen auch unter einer geringfügigen Änderung des Spiels stabil sein. Wählt ein Spieler mit geringer Wahrscheinlichkeit nicht immer die beabsichtigte Strategie, sondern mit "zitternder Hand" irgendeine andere Strategie, so soll nun überprüft werden, ob die Gleichgewichte auch nach Einbezug einer extrem geringen Fehlerwahrscheinlichkeitsannahme erhalten bleiben. Die hier erhaltenen stabilen Lösungen heißen "trembling-hand-perfekt".

Definition:

Ein Strategieprofil ist in der strategischen Form ε-perfekt, wenn es vollkommen gemischt ist und ein s_i' für alle i und beliebige s_i existiert, so dass

$$u_i(s_i, \varepsilon_{-i}) < u_i(s_i', \varepsilon_{-i}) \text{ existiert, wobei } (\varepsilon_i(s_i)) < \varepsilon.$$

Ein "perfektes Gleichgewicht" ist nun der Grenzwert einer solchen ε-perfekten Folge von Strategien, wobei $\varepsilon \to 0$ geht.

Beispiel:(nach Holler/Illing)

Betrachte die Matrix eines Spiels:

	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	(1,1)	(0,0)	(-6,-4)
s_{12}	(0,0)	(0,0)	(-4,-4)
s_{13}	(-4,-6)	(-4,-4)	(-4,-4)

Das Spiel hat drei Nashgleichgewichte $(s_{11}, s_{21})(s_{12}, s_{22})(s_{13}, s_{23})$. Sind sie nun alle auch perfekt?

Definition:

Perturbation:
hier: verschiedene Strategien werden zu unterschiedlichen und geringen Wahrscheinlichkeiten ("fälschlich") mit zitternder Hand gespielt.
uniforme Perturbation:
hier: verschiedene Strategien werden zu gleichen, geringen Wahrscheinlichkeiten ("fälschlich") mit zitternder Hand gespielt.
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 ...$

(s_{13}, s_{23}) ist tivialer Weise nicht perfekt:
Unter der Perturbation mit Fehlerwahrscheinlichkeiten ε_1 und ε_2 für die Strategien s_{21} und s_{22} spielt Spieler 2 s_{23} mit einer Wahrscheinlichkeit
$1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.
Hieraus folgt:

$$u_1(s_{12}) = -4(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) > -4 = u_1(s_{13})$$

Das bedeutet Spieler 1 würde immer s_{12} der Strategie s_{13} vorziehen. Entsprechend wrde Spieler 2 wegen

$$u_2(s_{22}) = -4(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) > -4 = u_2(s_{23})$$

die Strategie s_{22} bevorzugen.

Ist (s_{12}, s_{22}) ein perfektes Gleichgewicht?
Für Spieler 1 bedeutet es, dass Spieler 2 irrtümlich s_{21} mit der Wahrscheinlichkeit ε_1 und s_{23} mit einer Wahrscheinlichkeit ε_3 spielt. Hieraus ergibt sich die Bedingung:

$$u_1(s_{11}) = \varepsilon_1 - 6 \cdot \varepsilon_3 \leq 0 - 4 \cdot \varepsilon_3 = u_1(s_{12})$$
oder
$$\varepsilon_1 \leq 2 \cdot \varepsilon_3$$

(s_{12}, s_{22}) ist also unter der Annahme, dass der Fehler s_{21} nicht mindestens doppelt mal so häufig gemacht wird wie s_{23}, ein perfektes Gleichgewicht. Es finden sich immer Irrtumswahrscheinlichkeiten $\varepsilon_3 = a \cdot \varepsilon_1$ mit $a > \frac{1}{2}$, die beliebig klein werden können und trotzdem diese Bedingung erfüllen. Hieraus entsteht die Hypothese der *uniformen Perturbation* , die nur gleiche Fehlerwahrscheinlichkeiten betrachtet.
Für (s_{11}, s_{21}) betrachte man eine Perturbation, bei der Spieler 2 wiederum mit ε_2 und ε_3 s_{22} und s_{23} fälschlich spielt. Daraus folgt:

$$u_1(s_{12}) = -4 \cdot \varepsilon_3 < (1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) - 6 \cdot \varepsilon_3 = 1 - \varepsilon_2 - 7 \cdot \varepsilon_3 = u_1(s_{11})$$

gilt nur für ε_i nahe 0, womit die Bedingung für die Perfektheit auch hier erfüllt ist.

1.2 Properes Gleichgewicht

Eine weitere Verfeinerung des Gleichgewichtkonzepts besteht im Konzept des "properen Gleichgewichts", welches die Idee des "trembling-hand-perfekt" um folgende Eigenschaft erweitert:
Es liegt im Interesse des Spielers kostspielige Fehler zu vermeiden und somit wird der Gegenspieler eine weit geringere Wahrscheinlichkeit für kostspielige Fehler ansetzen als für Fehler, die einen geringeren Verlust nach sich ziehen. Diese Erweiterung bedeutet natürlich, dass jedes "propere Gleichgewicht" ein perfektes Gleichgewicht ist, da es eine stärkere Bedingung einfordert.

Definition:

Ein ε-properes Gleichgewicht ist ein vollkommen gemischtes Strategieprofil mit der Eigenschaft, wenn für alle Spieler i gilt:
Gibt es zwei Strategien s_i, s_i^* mit

$$u(s_i^*) > u(s_i),$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass s_i gespielt wird mindestens $\frac{1}{\varepsilon}$-mal so hoch wie für s_i', das heisst sie ist für ε nahe 0 unendlich mal höher. Die Wahrscheinlichkeit für eine schlechtere Strategie also ε-mal kleiner. Ein "properes Gleichgewicht" ist der Grenzwert einer solchen ε-perfekten Folge von Strategien, wobei $\varepsilon \to 0$ geht.

Beispiel:(nach Holler/Illing)
Betrachte die Matrix eines Spiels:

	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	(1,1)	(0,0)	(-6,-4)
s_{12}	(0,0)	(0,0)	(-4,-4)
s_{13}	(-4,-6)	(-4,-4)	(-4,-4)

Das Nashgleichgewicht (s_{12}, s_{22}) ist nicht proper, denn für $u_i(s_{i1}, s_{j2}) > u_i(s_{i3}, s_{j2})$ ist ein Fehler s_{i3} für Spieler i kostspieliger als ein Fehler s_{i1}. Kommt nun der Fehler s_{i1} ε-mal vor, so tritt s_{i3} also höchstens $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2$-mal auf. Deshalb rechnet Spieler j damit, dass Spieler i mit den Wahrscheinlichkeiten $s_{i1} = \varepsilon, s_{i2} = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2$ und $s_{i3} = \varepsilon^2$ spielt. (s_{12}, s_{22}) ist also nicht proper, da es sich in diesem Fall für Spieler j immer lohnt, von der zweiten auf die erste Strategie zu wechseln, denn

$$u_j(s_{j1}) = \varepsilon - 6 \cdot \varepsilon^2 > 0 - 4 \cdot \varepsilon^2 = u_j(s_{j2}).$$

1.3 Essentielles Gleichgewicht und Robustheit

Bei diesem Konzept wird nun nicht versucht die Fehler des Gegenspielers zu antizipieren, sondern es wird ein Informationsdefizit ber die Auszahlungen angenommen. Die Spieler kennen die strukturellen Züge des Spiels, der *Payoff* des Gegenspielers kann jedoch vom Erwarteten abweichen. Die ermittelten Nash-Gleichgewichte s^* sind "essentiell", wenn es zu jedem Spiel mit Auszahlungen, die nahe bei den Auszahlungen des tatsächlichen Spiels Γ liegen(*Perturbation der Auszahlungen*), ein Gleichgewicht gibt, das nahe bei dem ursprünglich betrachteten Gleichgewicht s^* liegt.

Beispiel:(nach Holler/Illing)
Betrachte die Matrix eines Spiels:

	s_{21}	s_{22}
s_{11}	(0,100+ε)	(0,100)
s_{12}	(-10,-10)	(40,40)

Das Nashgleichgewicht (s_{11}, s_{21}) ist nicht essentiell, weil Spieler 2 niemals s_{21} spielen würde, wenn bei (s_{11}, s_{21}) die Auszahlung geringfügig kleiner als 100 wäre. Es ist nicht für jedes Spiel die Existenz eines "essentiellen Gleichgewichtes" garantiert.